Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil Industrial

1	
2	
Nota	

Álgebra[1] - Solución Control Nº 3 - PEP 3
Profesor Ricardo Santander Baeza
01 de Octubre del 2004

(1) Demuestre que

$$z^{2n} - 2z^n \cos n\alpha = -1 \Longrightarrow [(z^n = \cos n\alpha + i \text{ sen } n\alpha) \quad \vee \quad (z^n = \cos n\alpha - i \text{ sen } n\alpha)]$$

Solución

$$\begin{aligned}
z^{2n} - 2z^n \cos n\alpha + 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (z^n)^2 - 2z^n \cos n\alpha + 1 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \frac{2\cos n\alpha \pm \sqrt{(2\cos n\alpha)^2 - 4}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \frac{2\cos n\alpha \pm \sqrt{4\cos^2 n\alpha - 4}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \frac{2\cos n\alpha \pm \sqrt{4(\cos^2 n\alpha - 1)}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \frac{2\cos n\alpha \pm \sqrt{4(-1)(1 - \cos^2 n\alpha)}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \frac{2\cos n\alpha \pm 2i \text{ sen } n\alpha}{2} \\
&\Longrightarrow \quad z^n = \cos n\alpha \pm i \text{ sen } n\alpha \\
&\Longrightarrow \quad [z^n = \cos n\alpha + i \text{ sen } n\alpha] \quad \vee \quad [z^n = \cos n\alpha - i \text{ sen } n\alpha]
\end{aligned}$$

[1] Cada problema vale 3.0 puntos
Tiempo 60'

(2) Considere el sistema lineal; $AX = B$ tal que

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(10), \text{ donde } a_{ij} = i \quad (1 \leq i \leq 10); (1 \leq j \leq 10)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} \quad \wedge B = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{10} \end{pmatrix}$$

Determine el conjunto:

$$S = \{(b_2, b_3, \dots, b_{10}) \in \mathbb{R}^9 \mid AX = B \text{ tiene solución}\}$$

Solución

Procedemos a aplicar el teorema del rango.

(a)

$$(A|B) \quad = \quad \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & | & b_2 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & | & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 10 & 10 & 10 & \dots & 10 & | & b_{10} \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (l_2 \longrightarrow l_2 - 2l_1) \\ (l_3 \longrightarrow l_3 - 3l_1) \\ \vdots \\ (l_{10} \longrightarrow l_{10} - 10l_1) \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_2 - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_3 - 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_{10} - 10 \end{array}\right)$$

(b) Análisis de la situación:

Como $\rho(A) = 1$ entonces $AX = B$ tiene solución si y sólo si $\rho(A|B) = 1$

Ahora,

$\rho(A|B) = 1 \Longleftrightarrow (b_2, b_3, \dots, b_{10}) = (2, 3, \dots, 10)$

Así que $S = \{(2, 3, \dots, 10)\}$