Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Solución del Examen de Álgebra[1]
20 de Diciembre de 2006
Profesor Ricardo Santander Baeza

(1) Demuestre que

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \begin{cases} 2 & : \text{Si } n \text{ es múltiplo de } 3 \\ -1 & : \text{Si } n \text{ no es múltiplo de } 3 \end{cases}$$

Solución

Etapa 1. Si escribimos $z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ en forma trigonométrica debemos tener que:

$$z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = |z|(\cos\alpha + i\text{sen }\alpha) \qquad (*)$$

Pero como,

- $|z| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = 1$, y
- $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\alpha + i\text{sen }\alpha \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \cos\alpha & = & -\frac{1}{2} \\ \text{sen }\alpha & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right| \Longrightarrow \alpha = 120^{\text{o}}$

Entonces sustituyendo en $(*)$, tenemos que

$$z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos 120 + i\text{sen } 120 \ \wedge \ \bar{z} = \overline{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} = \overline{\cos 120 + i\text{sen } 120} = \cos 120 - i\text{sen } 120$$

Etapa 2. Aplicamos la fórmula de De Moivre y conseguimos que,

$$\begin{aligned} z^n &= \cos 120n + i\text{sen } 120n \\ \bar{z}^n &= \cos 120n - i\text{sen } 120n \end{aligned}$$

Etapa 3. Finalmente,

$$\begin{aligned} z^n + \bar{z}^n &= \cos 120n + i\text{sen } 120n + \cos 120n - i\text{sen } 120n \\ &= 2\cos 120n \qquad (**) \end{aligned}$$

Y como al dividir n por 3 tenemos que $n = 3s$ o $n = 3s+1$ o $n = 3s+2$ entonces tenemos tres casos para sustituir en $(**)$:

Caso 1. $n = 3s \Longrightarrow z^n + \bar{z}^n = 2\cos 120\cdot 3s = 2\cos 360s = 2$

Caso 2. $n = 3s+1 \Longrightarrow z^n + \bar{z}^n = 2\cos 120\cdot(3s+1) = 2\cos(360s+120) = 2\cos 120 = -1$

Caso 3. $n = 3s+2 \Longrightarrow z^n + \bar{z}^n = 2\cos 120\cdot(3s+2) = 2\cos(360s+240) = 2\cos 240 = -1$

[1]Cada problema vale 1,5 puntos
Tiempo 120 '

(2) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}_1 & = & \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (*) \text{ tiene solución única}\} \\ \mathbb{S}_2 & = & \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\} \\ \mathbb{S}_3 & = & \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (*) \text{ No tiene solución}\} \end{array}$$

Solución

Etapa 1. Si notamos $(A|B)$ a la matriz ampliada asociada al sistema $(*)$ entonces tenemos que

$$(A|B) \quad = \quad \begin{pmatrix} a & b & 1 & |1 \\ 1 & ab & 1 & |b \\ 1 & b & a & |1 \end{pmatrix}$$

Etapa 2. Realizando operaciones elementales en $(A|B)$ tenemos que:

$$(A|B) \quad \approx \quad \begin{pmatrix} a & b & 1 & | & 1 \\ 0 & b(a^2-1) & a-1 & | & ab-1 \\ 0 & b(a+2)(a-1) & 0 & | & ab+b-2 \end{pmatrix}$$

Etapa 3. Ahora procedemos al estudio de la existencia de soluciones de $(*)$, aplicando el teorema del rango.

Caso 1. Si $b(a+2)(a-1)=0$ entonces sucede que $b=0 \vee a+2=0 \vee a-1=0$.

Luego, tenemos las posibilidades:

- $b=0 \Longrightarrow (A|B) \approx \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (a,0)\in\mathbb{S}_3$, pues, $\rho(A|B)\neq\rho(A)$
- $a=-2 \Longrightarrow (A|B) \approx \begin{pmatrix} -2 & b & 1 & | & 1 \\ 0 & 3b & -3 & | & -2b-1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -b-2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Si } b=-2 \text{ entonces } (-2,-2)\in\mathbb{S}_2 \\ \text{Si } b\neq -2 \text{ entonces } (-2,b)\in\mathbb{S}_3 \end{cases}$
- $a=1 \Longrightarrow (A|B) \approx \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2b-2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Si } b=1 \text{ entonces } (1,1)\in\mathbb{S}_2 \\ \text{Si } b\neq 1 \text{ entonces } (1,b)\in\mathbb{S}_3 \end{cases}$

Caso 2. Si $b(a+2)(a-1)\neq 0$ entonces sucede lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(A|B) &\approx \left(\begin{array}{ccccc} a & b & 1 & | & 1 \\ 0 & b(a^2-1) & a-1 & | & ab-1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \end{array}\right) \\
&\approx \left(\begin{array}{ccccc} a & b & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & b(a^2-1) & a-1 & | & ab-1 \end{array}\right) \\
&\approx \left(\begin{array}{ccccc} a & 0 & 1 & | & 1-\dfrac{ab+b-2}{(a+2)(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & 0 & a-1 & | & (ab-1)-(a+1)\dfrac{ab+b-2}{a+2} \end{array}\right) \\
&\approx \left(\begin{array}{ccccc} a & 0 & 1 & | & \dfrac{(a-b)(a+1)}{(a+2)(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & 0 & a-1 & | & \dfrac{a-b}{a+2} \end{array}\right) \\
&\approx \left(\begin{array}{ccccc} a & 0 & 1 & | & \dfrac{(a-b)(a+1)}{(a+2)(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & | & \dfrac{a-b}{(a+2)(a-1)} \end{array}\right) \\
&\approx \left(\begin{array}{ccccc} a & 0 & 0 & | & \dfrac{a(a-b)}{(a+2)(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & | & \dfrac{a-b}{(a+2)(a-1)} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

- Si $a=0$ tenemos que $(A|B) \approx \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{b-2}{-2b} \\ 0 & 0 & 1 & | & \dfrac{-b}{-2} \end{array}\right)$, y en estas condiciones, $(0,b) \in \mathbb{S}_2$
- Si $a \neq 0$ tenemos que $(A|B) \approx \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & | & \dfrac{(a-b)}{(a+2)(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & | & \dfrac{a-b}{(a+2)(a-1)} \end{array}\right)$, y en estas condiciones $(a,b) \in \mathbb{S}_1$

(3) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$

(a) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_{c(3)}^{c(3)} = A$
Solución

Debemos construir $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_{c(3)}^{c(3)} = A$

Por definición $c(3) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, y

$A = [T]_{c(3)}^{c(3)} = \big([T(1,0,0)]_{c(3)}\ [T(0,1,0)]_{c(3)}\ [T(0,0,1)]_{c(3)}\big)$ entonces

$$\big([T(1,0,0)]_{c(3)} \quad [T(0,1,0)]_{c(3)} \quad [T(0,0,1)]_{c(3)}\big) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Así que,

$$[T(1,0,0)]_{c(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff T(1,0,0) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) = (2,1,1)$$
$$[T(0,1,0)]_{c(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff T(1,0,0) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 2(0,0,1) = (2,3,2)$$
$$[T(0,0,1)]_{c(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff T(1,0,0) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 3(0,0,1) = (0,1,3)$$

Como $c(3)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ entonces se verifica que

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Así que, si queremos construir $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ en las condiciones de encima entonces forzosamente debemos definir T, como sigue

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\ &= x(2,1,1) + y(2,3,2) + z(0,1,3) \\ &= (2x+2y, x+3y+z, x+2y+3z) \end{aligned}$$

Es decir el operador lineal pedido es

$$T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3 \ : \ T(x,y,z) = (2x+2y, x+3y+z, x+2y+3z)$$

(b) Decida si la transformación T obtenida en la pregunta anterior es diagonalizable.

Solución

Como $[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ entonces $P_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} (\lambda-2) & -2 & 0 \\ -1 & (\lambda-3) & -1 \\ -1 & -2 & (\lambda-3) \end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-5)$

Luego,

$$V.P = \{1,2,5\}$$

Todos de multiplicidad algebraica 1 entonces T es diagonalizable

(c) Si la transformación T resulta ser diagonalizable, determine una base de vectores propios de T.

Solución

En general un algoritmo de cálculo es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
u \in (\mathbb{R}^3)_\lambda &\iff u \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ T(u) = \lambda u \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ T(x,y,z) = \lambda(x,y,z) \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ (2x+2y, x+3y+z, x+2y+3z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} 2x+2y & = & \lambda x \\ x+3y+z & = & \lambda y \\ x+2y+3z & = & \lambda z \end{array}\right| \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Caso 1. Si $\lambda = 1$ entonces sustituyendo en $(*)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
u \in (\mathbb{R}^3)_1 &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} 2x+2y & = & x \\ x+3y+z & = & y \\ x+2y+3z & = & z \end{array}\right| \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} x+2y & = & 0 \\ x+2y+z & = & 0 \\ x+2y+2z & = & 0 \end{array}\right| \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ [z = 0 \wedge x = -2y] \\
&\iff u = (-2y, y, 0), y \in \mathbb{R} \\
&\iff u = y(-2,1,0), y \in \mathbb{R} \\
&\iff u = \langle\{(-2,1,0)\}\rangle
\end{aligned}
$$

Así que,

$$
(\mathbb{R}^3)_1 \quad = \quad \langle\{(-2,1,0)\}\rangle
$$

Caso 2. Si $\lambda = 2$ entonces sustituyendo en $(*)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
u \in (\mathbb{R}^3)_2 &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} 2x+2y & = & 2x \\ x+3y+z & = & 2y \\ x+2y+3z & = & 2z \end{array}\right| \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} 2y & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \\ x+2y+z & = & 0 \end{array}\right| \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ [y = 0 \wedge x = -z] \\
&\iff u = (-z, 0, z), z \in \mathbb{R} \\
&\iff u = z(-1,0,1), z \in \mathbb{R} \\
&\iff u = \langle\{(-1,0,1)\}\rangle
\end{aligned}
$$

Así que,

$$
(\mathbb{R}^3)_2 \quad = \quad \langle\{(-1,0,1)\}\rangle
$$

Caso 3. Si $\lambda = 5$ entonces sustituyendo en $(*)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
u\in(\mathbb{R}^3)_5 \quad & \Longleftrightarrow \quad u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \wedge \ \begin{array}{lcr|} 2x+2y & = & 5x\\ x+3y+z & = & 5y\\ x+2y+3z & = & 5z\\ \hline \end{array}\\
& \Longleftrightarrow \quad u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \wedge \ \begin{array}{lcr|} -3x+2y & = & 0\\ x-2y+z & = & 0\\ x+2y-2z & = & 0\\ \hline \end{array}\\
& \Longleftrightarrow \quad u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left[y=\frac{3}{2}x\wedge 2x=z\right]\\
& \Longleftrightarrow \quad u=\left(x,\frac{3}{2}x,2x\right), x\in\mathbb{R}\\
& \Longleftrightarrow \quad u=x\left(1,\frac{3}{2},2\right), x\in\mathbb{R}\\
& \Longleftrightarrow \quad u=\left\langle\left\{\left(1,\frac{3}{2},2\right)\right\}\right\rangle
\end{aligned}
$$

Así que,

$$
(\mathbb{R}^3)_5 \quad = \quad \left\langle\left\{\left(1,\frac{3}{2},2\right)\right\}\right\rangle=\langle\{(2,3,4)\}\rangle
$$

Así que podemos formar el conjunto $\alpha=\{(-2,1,0),(-1,0,1),(2,3,4)\}\subset\mathbb{R}^3$, tenemos al menos dos razones para concluir que α es una base de vectores propios, por ejemplo:

Vectores propios de subespacios propios diferentes son linealmente independientes y como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)=3$ entonces también es un sistema de generadores para $\mathbb{R}^3$

O bien,

$$
\det\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \quad = \quad \det\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 6 & 3 & 0\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}=12\neq 0
$$

Y entonces α es linealmente independiente, y podemos repetir el argumento de encima.

(4) Sea $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ tal que $T((x,\, y,\, z,\, w))=(x-z+w,\, y+w,\, -2x+2z-2w,\, 2y+2w)$

(a) ¿ Es T un isomorfismo ?. Justifique su respuesta

Solución

Si $c(4)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ entonces

$$
[T]_{c(4)}^{(c(4)} \quad = \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}
$$

Luego,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Así que, T no es un isomorfismo.

(b) ¿ Es T diagonalizable ?. Justifique su respuesta

Solución

Usando la información obtenida en el punto anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
P_T(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 0 & 1 & -1 \\ 0 & (\lambda-1) & 0 & -1 \\ 2 & 0 & (\lambda-2) & 2 \\ 0 & -2 & 0 & (\lambda-2) \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 0 & -1 \\ 0 & (\lambda-2) & 2 \\ -2 & 0 & (\lambda-2) \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ (\lambda-1) & 0 & -1 \\ -2 & 0 & (\lambda-2) \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-1)^2\det\begin{pmatrix} (\lambda-2) & 2 \\ 0 & (\lambda-2) \end{pmatrix} - (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 0 & (\lambda-2) \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \\
&\quad 2\det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & -1 \\ -2 & (\lambda-2) \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 0 \\ -2 & 0) \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2 - 2(\lambda-1)(\lambda-2) - 2(\lambda-1)(\lambda-2) + 4 \\
&= [(\lambda-1)(\lambda-2)-2]^2 \\
&= (\lambda(\lambda-3))^2
\end{aligned}$$

Ahora, si llamamos $m_T(\lambda) = \lambda(\lambda-3)$ entonces

$$\begin{aligned}
m_T([T]_{c(4)}^{(c(4)}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto T no es diagonalizable.