**Universidad de Santiago de Chile**
**Departamento de Matemática y C.C.**
**Ingeniería Civil**

**Solución Examen 1 de Álgebra**[1]
**Profesor Ricardo Santander Baeza**
**12 de Enero del 2009**

(1) Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y-z &=& 2\\ x+2y+z &=& 3\\ x+y+(\alpha^2-5)z &=& \alpha \end{array}\right| \qquad (*)$$

Si $\mathbb{S}=\{\alpha\in\mathbb{R}\mid (*) \text{ tiene solución}\}$ entonces demuestre que $\{-2\}\cap\mathbb{S}=\emptyset$

Solución 1.

$$\{-2\}\cap\mathbb{S}\neq\emptyset \Longrightarrow -2\in\mathbb{S}\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} x+y-z &=& 2\\ x+2y+z &=& 3\\ x+y-z &=& -2 \end{array}\right| \Longrightarrow 2=-2(\Longrightarrow\Longleftarrow)$$

Solución 2

Etapa 1. La matriz ampliada del sistema $(A|B)$ es

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & (\alpha^2-5) & \alpha \end{array}\right)$$

Etapa 2. haciendo operaciones elementales de fila obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 \end{array}\right)$$

Etapa 3. Si hacemos $\alpha=-2$ entonces $\rho(A)=2<\rho(A|B)=3$. Pues

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Así que $(*)$ no tiene solución si $\alpha=-2$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

(2) Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces demuestre que

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)) \Rightarrow \beta\{(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})\} \text{ es linealmente independiente en } \mathbb{R}^3$$

Solución

Si $x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}) + x_2(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + x_3(a_{31}, a_{32}, a_{33}) = (0, 0, 0)$ entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1a_{11} + x_2a_{21} + x_3a_{31} & = & 0 \\ x_1a_{12} + x_2a_{22} + x_3a_{32} & = & 0 \\ x_1a_{13} + x_2a_{23} + x_3a_{33} & = & 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusión

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así que

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)) \Rightarrow A^t \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^t\right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\beta$ es linealmente independiente.

(3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$. Si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base del espacio $\mathbb{V}$ y $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que $u_s = \sum\limits_{i=1}^{s} v_{s+1-i}$, para $s = 1, 2, \dots n$ entonces

(a) Demuestre que $\alpha$ base de $\mathbb{V} \Longrightarrow \beta$ base de $\mathbb{V}$

En primer lugar observamos que los elementos de la base $\beta$ son de la forma:

$$\begin{array}{rclcl} u_1 & = & \sum\limits_{i=1}^{1} v_{1+1-i} & = & v_1 & \Longleftrightarrow & v_1 & = & u_1 \\ u_2 & = & \sum\limits_{i=1}^{2} v_{2+1-i} & = & v_2 + v_1 & \Longleftrightarrow & v_2 & = & u_2 - u_1 \\ u_3 & = & \sum\limits_{i=1}^{3} v_{3+1-i} & = & v_3 + v_2 + v_1 & \Longleftrightarrow & v_3 & = & u_3 - u_2 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \\ u_j & = & \sum\limits_{i=1}^{j} v_{j+1-i} & = & v_j + v_{j-1} + \cdots + v_1 & \Longleftrightarrow & v_j & = & u_j - u_{j-1} \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \\ u_n & = & \sum\limits_{i=1}^{n} v_{n+1-i} & = & v_n + v_{n-1} + \cdots + v_1 & \Longleftrightarrow & v_n & = & u_n - u_{n-1} \end{array} \tag{1}$$

En segundo lugar, mostramos que $\beta$ linealmente independiente.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_j u_j = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a_1v_1 + a_2(v_2+v_1) + \cdots + a_n(v_n + v_{n-1} + \cdots + v_1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)v_1 + (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)v_2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)v_{n-1} + a_nv_n = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &=& 0 \\ a_2 + \cdots + a_n &=& 0 \\ &\vdots& \\ a_{n-1} + a_n &=& 0 \\ a_n &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0
\end{aligned}
$$

Así que $\beta$ es linealmente independiente.

En tercer lugar, mostramos que $\beta$ es un sistema de generadores.

Si $u \in \mathbb{V}$ entonces como $\alpha$ es una base entonces existen únicos escalares $c_1, c_2, \cdots, c_n$ tales que $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, pero de acuerdo con (1) tenemos que

$$
\begin{aligned}
u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \quad &\Rightarrow \quad u = a_1u_1 + a_2(u_2 - u_1) + \cdots + a_n(u_n - u_{n-1}) \\
&\Rightarrow \quad u = (a_1 - a_2)u_1 + (a_2 - a_3)u_2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)a_{n-1} + a_nu_n
\end{aligned}
$$

Luego $\beta$ genera $\mathbb{V}$, y por ende es una base de $\beta$.

(b) Determine $[I]_\alpha^\beta$ la matriz cambio de la base $\alpha$ para la base $\beta$

Solución

De (1), sigue que

$$
\begin{array}{rcl}
v_1 &=& u_1 + 0u_2 + 0u_3 + \cdots + 0u_n \\
v_2 &=& -u_1 + u_2 + 0u_3 + \cdots + u_n \\
&\vdots& \\
v_n &=& 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + \cdots + u_n
\end{array} \tag{2}
$$

Por tanto, de (2) tenemos que

$$
[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

(4) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tal que $T(x, y, z) = x + 2y - 3z$

(a) Si se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto interno canónico entonces determine $(\ker(T))^\perp$

Solución

Sabemos que

$$
(\ker(T))^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, w\rangle = 0 \ (\forall w; w \in \ker(T))\}
$$

Luego, lo primero que debemos hacer es determinar $\ker(T)$

$$\begin{aligned}
w \in \ker(T) &\iff w \in \mathbb{R}^3 \wedge T(w) = 0_{\mathbb{R}} \\
&\iff w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge T(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}} \\
&\iff w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x + 2y - 3z = 0 \\
&\iff w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = 3z - 2y \\
&\iff w = (3z - 2y, y, z);\ y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \\
&\iff w = z(3, 0, 1) + y(-2, 1, 0);\ y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \\
&\iff w \in \langle\{(3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}\rangle
\end{aligned}$$

Luego,

$$\ker(T) \quad = \quad \langle\{(3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}\rangle$$

Como $\alpha = \{(3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}$ es un conjunto linealmente independiente, pues

$$a_1(3, 0, 1) + a_2(-2, 1, 0) = (0, 0, 0) \Longrightarrow (3a_1 - 2a_2, a_2, a_1) = (0, 0, 0) \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

entonces $\alpha$ es una base del $\ker(T)$, y podemos proceder a calcular $(\ker(T))^{\perp}$

$$\begin{aligned}
u \in (\ker(T))^{\perp} &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle u, w\rangle = 0 \ (\forall w; w \in \ker(T)) \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle (x, y, z), (3, 0, 1)\rangle = 0 \wedge \langle (x, y, z), (-2, 1, 0)\rangle = 0 \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge 3x + z = 0 \wedge -2x + y = 0 \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge 3x + z = 0 \wedge -2x + y = 0 \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge z = -3x \wedge y = 2x \\
&\iff u = (x, 2x, -3x) \wedge x \in \mathbb{R} \\
&\iff u = x(1, 2, -3) \wedge x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$(\ker(T))^{\perp} = \langle\{(1, 2, -3)\}\rangle$$

(b) Demuestre que $\mathbb{R}^3 = \ker(T) \oplus (\ker(T))^{\perp}$

Solución

Si llamamos $\beta = \{(3, 0, 1), (-2, 1, 0), (1, 2, -3)\}$ entonces como $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3 entonces basta mostrar que $\beta$ genera $\mathbb{R}^3$, es decir debemos resolver la ecuación

$$(x, y, z) \quad = \quad a_1(3, 0, 1) + a_2(-2, 1, 0) + a_3(1, 2, -3)$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)=a_1(3,0,1)+a_2(-2,1,0)+a_3(1,2,-3) &\iff (x,y,z)=(3a_1-2a_2+a_3,a_2+2a_3,a_1-3a_3)\\
&\iff \left.\begin{array}{rcl} 3a_1-2a_2+a_3 &=& x\\ a_2+2a_3 &=& y\\ a_1-3a_3 &=& z \end{array}\right|\\
&\Longrightarrow a_1=\frac{3x+6y+4z}{13}\\
&\Longrightarrow a_2=\frac{-2x+9y+6z}{13}\\
&\Longrightarrow a_3=\frac{x+2y-3z}{13}
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
(x,y,z) \quad = \quad \underbrace{\frac{3x+6y+4z}{13}(3,0,1)+\frac{-2x+9y+6z}{13}(-2,1,0)}_{\in \ker(T)}+\underbrace{\frac{x+2y-3z}{13}(1,2,-3)}_{\in (\ker(T))^{\perp}}
$$

Y

$$
\mathbb{R}^3 \quad = \quad \ker(T)+(\ker(T))^{\perp}
$$

Par concluir falta ver que $\ker(T)\cap(\ker(T))^{\perp}$

En efecto

$$
\begin{aligned}
u\in\ker(T)\cap(\ker(T))^{\perp} &\iff u\in\ker(T)\wedge u\in(\ker(T))^{\perp}\\
&\iff u\in\ker(T)\wedge\langle u,u\rangle=0\\
&\iff u=(0,0,0)
\end{aligned}
$$

De donde

$$
\mathbb{R}^3 \quad = \quad \ker(T)\oplus(\ker(T))^{\perp}
$$