Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Solución Examen 1 de Álgebra[1]
Profesor Ricardo Santander Baeza
21 de Diciembre del 2009
Solsticio de verano

(1) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y considere $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{V}$ y $\beta = \{v_1 + 2v_2, v_1 - 3v_3, v_1 - 2v_2 + 3v_3\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\alpha \text{ base de } \mathbb{V} \Longrightarrow \beta \text{ es también una base de } \mathbb{V}$$

Solución

(a) Como α es una base de $\mathbb{V}$ entonces $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = 3$ y entonces para que β sea base, basta que sea linealmente independiente o un sistema de generadores para $\mathbb{V}$, ya que la cardinalidad o el número de vectores de β es 3,

(b) Así que, verifiquemos si se cumple la independencia lineal $\mathbb{V}$

$$\begin{aligned}
a_1(v_1 + 2v_2) + a_2(v_1 - 3v_3) + a_3(v_1 - 2v_2 + 3v_3) = 0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow (a_1 + a_2 + a_3)v_1 + (2a_1 - 2a_3)v_2 + (-3a_2 + 3a_3)v_3 = 0_{\mathbb{V}} \\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_1 - 2a_3 & = & 0 \\ -3a_2 + 3a_3 & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a_2 = a_3 = a_1 \quad \wedge \quad 3a_1 = 0 \\
&\Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0
\end{aligned}$$

Luego, β es linealmente independiente y entonces una base de $\mathbb{V}$.

(2) Si $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3) \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = (a+b+c)+(a-b)x+cx^2$ entonces demuestre que T es un isomorfismo.

Solución

En primer lugar mostramos que $T \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3), \mathbb{R}_2[x])$.

Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

(a) Por demostrar que $T(A + B) = T(A) + T(B)$

$$\begin{aligned}
T(A+B) &= T\begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3) + (a_1 + b_1 - (a_2 + b_2))x + (a_3 + b_3)x^2 \\
&= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) + (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2))x + (a_3 + b_3)x^2 \\
&= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 - a_2)x + a_3x^2 + (b_1 + b_2 + b_3) + (b_1 - b_2))x + b_3x^2 \\
&= T\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \\
&= T(A) + T(B)
\end{aligned}$$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

(b) Por demostrar que $T(\lambda A)=\lambda T(A)$

$$\begin{aligned}
T(\lambda A) &= T\begin{pmatrix}\lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3\end{pmatrix}\\
&= (\lambda a_1+\lambda a_2+\lambda a_3)+(\lambda a_1-\lambda a_2)x+\lambda a_3x^2\\
&= \lambda(a_1+a_2+a_3)+\lambda(a_1-a_2)x+\lambda a_3x^2\\
&= \lambda((a_1+a_2+a_3)+(a_1-a_2)x+a_3x^2)\\
&= \lambda T\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\\
&= \lambda T(A)
\end{aligned}$$

En segundo lugar, si $m(1\times 3)=\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\}$ es la base canónica de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)$ y $pol2=\{1,x,x^2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ entonces la representación matricial en esas bases de T es de la forma

$$\begin{aligned}
[T]_{m(1\times 3)}^{pol2} &= \left([T\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}]_{pol2}\quad [T\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}]_{pol2}\quad [T\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}]_{pol2}\right)\\
&= \left([(1+x+0x^2)]_{pol2}\quad [1-x+0x^2]_{pol2}\quad [1+0x+x^2]_{pol2}\right)\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\det[T]_{m(1\times 3)}^{pol2} = \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-2\neq 0$$

Por tanto T es un isomorfismo.

Alternativa

Como $T\in(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3),\mathbb{R}_2[x])$ y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3))=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]))=3$ entonces como consecuencia del teorema de la dimensión, para que T sea un isomorfismo, basta mostrar que T es inyectiva o que T es sobreyectiva. Así que estudiaremos el $ker(T)$.

$$\begin{aligned}
A\in ker(T) &\iff A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)\wedge T(A)=0_{\mathbb{R}_2[x]}\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)\wedge T(\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix})=0+0x+0x^2\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)\wedge(a_1+a_2+a_3)+(a_1-a_2)x+a_3x^2=0+0x+0x^2\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)\wedge \left.\begin{array}{lcl}a_1+a_2+a_3 &=& 0\\ a_1-a_2 &=& 0\\ a_3 &=& 0\end{array}\right|\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)\wedge \left.\begin{array}{lcl}a_1+a_2 &=& 0\\ a_1-a_2 &=& 0\end{array}\right|\wedge a_3=0\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)\wedge a_1=a_2=a_3=0\\
&\iff A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, $\ker(T)=\{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}\}$ y T es inyectiva, y por ende un isomorfismo.

(3) Si $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))$ tal que $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z\\ y-z\\ -z\end{pmatrix}$ entonces

(a) Demuestre que T es un operador diagonalizable

(b) Determine una base de vectores propios α de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$ tal que $[T]_{\alpha}^{\alpha}$, sea una matriz diagonal.

Solución

(a) En primer lugar, determinemos los valore propios de T

- $[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donde $c(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Entonces el polinomio característico es del tipo

$$P_T(\lambda) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} (\lambda - 1) & 0 & -2 \\ 0 & (\lambda - 1) & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1) \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Así que los valores propios son $V.P = \{1, -1\}$

(b) Determinemos los vectores propios de T

En general

$$\begin{aligned}
A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1))_\lambda \quad &\Longleftrightarrow \quad A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \ \wedge \ T(A) = \lambda A \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \wedge \ T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \wedge \ \begin{pmatrix} x + 2z \\ y - z \\ -z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \wedge \ \left. \begin{array}{lcl} x + 2z & = & \lambda x \\ y - z & = & \lambda y \\ -z & = & \lambda z \end{array} \right| \qquad (*)
\end{aligned}$$

Caso 1. $\lambda = 1$. De $(*)$ sigue que

$$\begin{aligned}
A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1))_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \ \wedge \ T(A) = A \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \wedge \ \left. \begin{array}{lcl} x + 2z & = & x \\ y - z & = & y \\ -z & = & z \end{array} \right| \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \wedge \ z = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad A = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1))_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Caso 2. Caso 2. $\lambda = -1$. De $(*)$ sigue que

$$
\begin{aligned}
A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{-1} &\iff A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) \ \wedge \ T(A) = -A \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \wedge \ \left.\begin{array}{ccc} x+2z & = & -x \\ y-z & = & -y \\ -z & = & -z \end{array}\right| \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \wedge \ x = -z \wedge y = \frac{1}{2}z \\
&\iff A = z\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego, $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{-1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

(c) Finalmente podemos observar que

$$
\alpha \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
$$

Es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$ y que en esa base el operador T se representa como una matriz diagonal En efecto

$$
[T]_{\alpha}^{\alpha} \quad = \quad \left(\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} \ \left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} \ \left[T\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

(4) Sea $(V, \langle,\rangle)$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V. Demuestre que

$$
\alpha \text{ Base Ortonormal } \implies \langle v, u\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle\langle u, v_j\rangle \quad (\text{ para cada } v \in V \wedge u \in V)
$$

En efecto

Si α es una base ortonormal entonces se verifica simultáneamente que $\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Luego, para cada $w \in \mathbb{V}$ tenemos que $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle w, vi\rangle \ v_i$, por tanto;

$$
\begin{aligned}
\langle v, u\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \ v_i, \sum_{j=1}^{n} \langle u, v_j\rangle \ v_j \right\rangle \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n} \langle u, v_j\rangle \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \right] \langle v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle u, v_j\rangle\langle v, v_j\rangle
\end{aligned}
$$