Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Solución del Segundo Examen de Álgebra[1]
08 de Marzo de 2007
Profesor Ricardo Santander Baeza

(1) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & by & + & 2z & = & 1 \\ x & + & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & by & + & (b+3)z & = & 2b-1 \end{array}\right| \qquad (\bigstar)$$

Determine

(a) $S_1 = \{b \in \mathbb{R} \mid (\bigstar)$ tiene solución única$\}$
(b) $S_2 = \{b \in \mathbb{R} \mid (\bigstar)$ tiene infinitas soluciones $\}$
(c) $S_3 = \{b \in \mathbb{R} \mid (\bigstar)$ no tiene solución $\}$

Solución

♦ Si A es la matriz de coeficientes asociada al sistema $\bigstar$, entonces podemos estudiar del valor del determinante, para analizar las posibles soluciones del sistema lineal. Así que

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & (2b-1) & 3 \\ 1 & b & (b+3) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & (2b-1) & 3 \\ 0 & 0 & (b+1) \end{pmatrix} = (b+1)(b-1)$$

♦ Análisis de las soluciones en la matriz ampliada asociada al sistema

Caso 1. $(b-1)(b+1) = 0$

Caso 1.1 Si $b = 1$

$$(A|B)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusión 1.1 $b = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones, es decir $\mathbf{1} \in \mathbb{S}_\mathbf{2}$

[1] Cada problema vale 1,5 puntos
Tiempo 120 '

Caso 1.2 Si $b=-1$

$$(A|B)) \;=\; \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Conclusión 1.2 $b=-1$ el sistema no tiene solución, es decir $\mathbf{-1} \in \mathbb{S}_{\mathbf{3}}$

Caso 2 Si $(b-1)(b+1)\neq 0$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
(A|B)) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 2 & 1 \\ 1 & 2b-1 & 3 & 1 \\ 1 & b & b+3 & 2b-1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 2 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 2(b-1) \end{array}\right) \\
&\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2(b-1)}{b+1} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b-2}{b-1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{b+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2(b-1)}{b+1} \end{array}\right) \\
&\approx \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5-b}{(b+1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{b+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2(b-1)}{b+1} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Equivalentemente, $x=\dfrac{5-b}{(b+1)} \wedge y=\dfrac{-2}{b+1} \wedge z=\dfrac{2(b-1)}{b+1}$

Conclusión 2 $(b-1)(b+1)\neq 0$ el sistema tiene solución única

(2) Si $\mathbb{S}_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ entonces

(a) Demuestre que $\mathbb{S}_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}_2[x]$, donde $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$; $\beta_2=\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3$; y $\beta_3=-\alpha_1+2\alpha_3$.

Solución

P.d.q. que $\mathbb{S}_2$ genera $\mathbb{R}_2[x]$.

Si $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}_2[x]$ entonces como $\mathbb{S}_1=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ existen únicos escalares c_1,c_2,c_3 tales que

$$a_0+a_1x+a_2x^2 \;=\; c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3 \qquad (\bigstar)$$

Ahora, para conseguir el resultado pedido debemos resolver la ecuación

$$a_0+a_1x+a_2x^2 \;=\; d_1\beta_1+d_2\beta_2+d_3\beta_3 \qquad (\bigstar\bigstar)$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1x + a_2x^2 &=& d_1\beta_1 + d_2\beta_2 + d_3\beta_3 \\ & \Downarrow & \\ a_0 + a_1x + a_2x^2 &=& d_1(\alpha_1 + \alpha_2) + d_2(\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3) + d_3(-\alpha_1 + 2\alpha_3) \\ & \Downarrow & \\ a_0 + a_1x + a_2x^2 &=& (d_1 + d_2 - d_3)\alpha_1 + (d_1 - d_2)\alpha_2 + (-3d_2 + 2d_3)\alpha_3 \end{array}$$

De $\bigstar$ sigue que

$$\left.\begin{array}{rcl} d_1 + d_2 - d_3 &=& c_1 \\ d_1 - d_2 &=& c_2 \\ -3d_2 + 2d_3 &=& c_3 \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{array}{rcl} d_1 &=& 2c_1 - c_2 + c_3 \\ d_2 &=& 2c_1 - 2c_2 + c_3 \\ d_3 &=& 3c_1 - 3c_2 + 2c_3 \end{array}$$

Sustituyendo en ($\bigstar\bigstar$) tenemos que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (2c_1 - c_2 + c_3)\beta_1 + (2c_1 - 2c_2 + c_3)\beta_2 + (3c_1 - 3c_2 + 2c_3)\beta_3$$

Es decir.

$$[a_0 + a_1x + a_2x^2]_{\mathbb{S}_2} = \begin{pmatrix} 2c_1 - c_2 + c_3 \\ 2c_1 - 2c_2 + c_3 \\ 3c_1 - 3c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} \iff a_0 + a_1x + a_2x^2 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \quad (\clubsuit)$$

Finalmente, como $\mathbb{S}_2$ es un sistema de generadores y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ entonces es un a base[2] !!!

(b) Determine la matriz de cambio de base desde $\mathbb{S}_1$ a $\mathbb{S}_2$.

Solución

$$[I]_{\mathbb{S}_1}^{\mathbb{S}_2} = \left([\alpha_1]_{\mathbb{S}_2} \quad [\alpha_2]_{\mathbb{S}_2} \quad [\alpha_3]_{\mathbb{S}_2}\right)$$

Así que usando nuestra fórmula $\clubsuit$ tenemos que

$$[\alpha_1]_{\mathbb{S}_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Pues} \quad \alpha_1 = 1\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3$$

$$[\alpha_2]_{\mathbb{S}_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{Pues} \quad \alpha_2 = 0\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3$$

$$[\alpha_3]_{\mathbb{S}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Pues} \quad \alpha_3 = 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3$$

Conclusión

[2]Esta es una de las soluciones, otra es probar que el conjunto es linealmente independiente y aplicar el mismo resultado, y la más natural es probar directamente que el conjunto es un sistema de generadores y linealmente independiente

$$[I]_{\mathbb{S}_1}^{\mathbb{S}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Determine $[\gamma]_{\mathbb{S}_2}$ si $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Solución

Dos alternativas: Una aplicando ♣

$$[\gamma]_{\mathbb{S}_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Pues} \quad \gamma = 1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3$$

Otra usando $[I]_{\mathbb{S}_1}^{\mathbb{S}_2}$

$$[\gamma]_{\mathbb{S}_2} = [I]_{\mathbb{S}_1}^{\mathbb{S}_2} [\gamma]_{\mathbb{S}_1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(3) Determine (si es posible), $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que

$$\text{Img }(T) = \langle \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid a_{11} - a_{22} = a_{12} - a_{21}\} \rangle$$

Solución

► En primer lugar determinemos la dimensión de Img (T)

$$\begin{aligned}
A \in \text{Img }(T) \quad &\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ a_{11} - a_{22} = a_{12} - a_{21} \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ a_{11} = a_{12} - a_{21} + a_{22} \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} (a_{12} - a_{21} + a_{22}) & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2); \quad a_{12} \in \mathbb{R}, a_{21} \in \mathbb{R}, a_{22} \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{21} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad A = a_{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) \leq 3$. Pero si $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ entonces

$$a_{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} (a_{12} - a_{21} + a_{22}) & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$ y $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) = 3$

► Ahora procedemos a concretar el proyecto, sin restricciones iniciales, es decir basta escoger cualquier base del espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$, para definir una transformación lineal que cumpla con la condición pedida, por tanto escogeré para el efecto la base canónica, $pol(2) = \{1, x, x^2\}$.

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{rcl} T(1) & := & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ T(x) & := & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ T(x^2) & := & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow T(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2) = a_0 \cdot T(1) + a_1 \cdot T(x) + a_2 \cdot T(x^2)$$

Luego,

$$T(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2) = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_0 - a_1 + a_2) & a_0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

(4) Sea $\alpha = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\} \subset \mathbb{R}$, el conjunto de valores propios de $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Si T es diagonalizable en $\mathbb{R}$ entonces demuestre que

$$T \text{ isomorfismo } \Longleftrightarrow \lambda_i \neq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, s$$

Solución

► Si T es diagonalizable en $\mathbb{R}$ entonces existe una base α de $\mathbb{R}^n$, formada por valores propios de T tal que

$$[T]_\alpha^\alpha = \text{diagonal } \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$$

► $\det([T]_\alpha^\alpha) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdots \lambda_s$

► Finalmente

$$T \text{ Isomorfismo } \Longleftrightarrow \det([T]_\alpha^\alpha) \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdots \lambda_s \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda_i \neq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, s$$