

Universidad de Santiago de Chile  
Departamento de Matemática y C.C.  
Ingeniería Civil

Solución Examen 2 de Álgebra<sup>1</sup>  
Profesor Ricardo Santander Baeza  
22 de Marzo del 2009

[1] Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 2a - 1 \\ x + ay + z & = & a^2 \\ x + y + az & = & 3 - 2a \end{array} \right| \quad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene solución única}\} \\ S_2 &= \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\} \\ S_3 &= \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ no tiene solución}\} \end{aligned}$$

Solución

Aplicamos el teorema del rango en el sistema (\*).

Etapas 1. Escalonamos la matriz ampliada asociada al sistema (\*)

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left( \begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 2a-1 \\ 1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & a & 3-2a \end{array} \right) \quad (l_1 \leftrightarrow l_2) \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a^2 \\ a & 1 & 1 & 2a-1 \\ 1 & 1 & a & 3-2a \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} (l_2 \rightarrow l_2 - al_1) \\ (l_3 \rightarrow l_3 - l_1) \end{array} \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 2a-1-a^3 \\ 0 & 1-a & a-1 & 3-2a-a^2 \end{array} \right) \quad (l_2 \leftrightarrow l_3) \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 3-2a-a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 2a-1-a^3 \end{array} \right) \quad (**) \end{aligned}$$

Caso 1. Si  $a = 1$  entonces sustituyendo en (\*\*), tenemos que

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

<sup>1</sup>Cada problema vale 1.5 puntos  
Tiempo 120'

Así que  $\rho(A|B) = \rho(A) = 1 < 3$ . Por tanto (\*) tiene infinitas soluciones.

Caso 2. Si  $a \neq 1$  entonces podemos seguir operando en (\*\*), y tenemos

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 3-2a-a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 2a-1-a^3 \end{array} \right) \quad (l_2 \leftrightarrow \frac{1}{1-a} l_2) \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & a+3 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 2a-1-a^3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} (l_1 \rightarrow l_1 - al_2) \\ (l_3 \rightarrow l_3 - (1-a^2)l_2) \end{array} \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+a & -3a \\ 0 & 1 & -1 & a+3 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & 3a^2+a-4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Caso 2.1 Si  $a \neq 1$  y  $a = -2$  entonces  $\rho(A) = 2$  y  $\rho(A|B) = 3$ , pues  $3(-2)^2 - 2 - 4 = 6$ . Así que (\*) no tiene solución

Caso 2.2 Si  $a \neq 1$  y  $a \neq -2$  entonces  $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$ , y (\*) tiene solución única.

Conclusión

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathbb{R} - \{-2, 1\} \\ S_2 &= \{1\} \\ S_3 &= \{-2\} \end{aligned}$$

[2] Sean  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$  dos  $\mathbb{K}$  espacios vectoriales y  $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ . Si consideramos  $\mathbb{U} \leq \mathbb{V}$  y definimos el conjunto:

$$T(\mathbb{U}) = \{w \in \mathbb{W} \mid (\exists u; u \in \mathbb{U}) \wedge T(u) = w\}$$

entonces demuestre que  $T(\mathbb{U}) \leq \mathbb{W}$ .

Solución

(a) En primer lugar

$$(i) \quad w \in T(\mathbb{U}) \iff w \in \mathbb{W} \wedge (\exists u; u \in \mathbb{U}) \wedge T(u) = w. \text{ Así que } T(\mathbb{U}) \subset \mathbb{W}$$

$$(ii) \quad \mathbb{U} \leq \mathbb{V} \implies 0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{U} \implies T(0_{\mathbb{V}}) \in \mathbb{W}$$

$$(iii) \quad T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \implies T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}. \text{ Así que } 0_{\mathbb{W}} \in T(\mathbb{U}) \text{ y } T(\mathbb{U}) \neq \emptyset$$

(b) Sean  $w_1 \in T(\mathbb{U}) \wedge w_2 \in T(\mathbb{U})$  entonces

$$\begin{aligned} w_1 \in T(\mathbb{U}) &\iff (\exists u_1; u_1 \in \mathbb{U}) : T(u_1) = w_1 \\ w_2 \in T(\mathbb{U}) &\iff (\exists u_2; u_2 \in \mathbb{U}) : T(u_2) = w_2 \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= T(u_1) + T(u_2) \quad (\text{Por construcción}) \\ &= T(u_1 + u_2) \quad (T \text{ es lineal}) \\ &= T(u) \quad (u_1 + u_2 = u \in \mathbb{U}, \text{ pues } \mathbb{U} \leq \mathbb{V}) \end{aligned}$$

Luego  $(w_1 + w_2) \in \mathbb{T}(\mathbb{U})$

(c) Sean  $\lambda \in \mathbb{K} \wedge w \in T(\mathbb{U})$  entonces

$$w \in T(\mathbb{U}) \iff (\exists u; u \in \mathbb{U}) : T(u) = w$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \lambda w &= \lambda T(u) \quad (\text{Por construcción}) \\ &= T(\lambda u) \quad (T \text{ es lineal}) \\ &= T(u_1) \quad (\lambda u = u_1 \in \mathbb{U}, \text{ pues } \mathbb{U} \leq \mathbb{V}) \end{aligned}$$

Luego  $(\lambda w) \in \mathbb{T}(\mathbb{U})$  y conforme a lo probado encima tenemos que  $T(\mathbb{U}) \leq \mathbb{W}$ .

[3] Si definimos la función  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $T(x, y, z) = (x - y, x - y, y + z, y + z)$  entonces

(a) Demuestre que  $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ .

Solución

Si  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  y  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  entonces

$$\begin{aligned} T((x, y, z) + (a, b, c)) &= T(x + a, y + b, z + c) \\ &= ([x + a] - [y + b], [x + a] - [y + b], [y + b] + [z + c], [y + b] + [z + c]) \\ &= ([x - y] + [a - b], [x - y] + [a - b], [y + z] + [b + c], [y + z] + [b + c]) \\ &= (x - y, x - y, y + z, y + z) + (a - b, a - b, b + c, b + c) \\ &= T(x, y, z) + T(a, b, c) \end{aligned}$$

Además si  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda(x, y, z)) &= T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (\lambda x - \lambda y, \lambda x - \lambda y, \lambda y + \lambda z, \lambda y + \lambda z) \\ &= (\lambda[x - y], \lambda[x - y], \lambda[y + z], \lambda[y + z]) \\ &= \lambda(x - y, x - y, y + z, y + z) \\ &= \lambda T(x, y, z) \end{aligned}$$

Luego,  $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ .

(b) Determine  $(\ker(T))^\perp$ , respecto del producto interno usual de  $\mathbb{R}^3$ .

Solución

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in \ker(T) &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \\
 &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge (x - y, x - y, y + z, y + z) = (0, 0, 0, 0) \\
 &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x - y = 0 \wedge y + z = 0 \\
 &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = y \wedge z = -y
 \end{aligned}$$

Así,

$$\ker T = \{(y, y, -y) : y \in \mathbb{R}\} = \langle \{(1, 1, -1)\} \rangle$$

Y de esta forma,

$$\begin{aligned}
 (\ker T)^\perp &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (1, 1, -1) \rangle = 0\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\} \\
 &= \{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \langle \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \rangle
 \end{aligned}$$

[4] Construya  $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_4[x])$  tal que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

- $1 + x^2 \in \ker T$
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_4[x])_3 = 2$ . Es decir la multiplicidad geométrica del valor propio  $\lambda = 3$  es 2
- $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img}(T)) = 3$

Solución

(a) Consideremos la base canónica  $\text{pol}(4) = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$  de  $\mathbb{R}_4[x]$

(b) Para que se verifique que  $1 + x^2 \in \ker T$  y simultáneamente  $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img}(T)) = 3$ , basta considerar

$$\ker T = \langle \{1, x^2\} \rangle$$

Pues de esta forma  $\dim_{\mathbb{R}} \ker(T) = 2$  y por teorema de la dimensión  $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img}(T)) = 3$ ,

Además,

$$1 + x^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x^2 \implies 1 + x^2 \in \langle \{1, x^2\} \rangle = \ker(T)$$

(c) Para que  $\lambda = 3$  sea un valor propio de  $T$  con multiplicidad geométrica 2, basta definir,

$$\begin{aligned}
 T(x) &= 3x \\
 T(x^3) &= 3x^3
 \end{aligned}$$

(d) Finalmente se puede definir  $T(x^4) = x^4$

De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}
 T(p(x)) &= T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) \\
 &= a_0T(1) + a_1T(x) + a_2T(x^2) + a_3T(x^3) + a_4T(x^4) \\
 &= a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 3x + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 3x^3 + a_4 \cdot x^4
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, una solución esta dada por:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) = 3a_1x + 3a_3x^3 + a_4x^4$$