Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Profesor Ricardo Santander Baeza
Solución Prueba acumulativa semestral
de Álgebra[1] Ingeniería Civil
14 de Agosto del 2004

(1) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula proposicional

$\mathrm{F}(n):\ (n\in\mathbb{N}: n \text{ impar }) \Longrightarrow n(n^2-1)$ es divisible por 24. Es verdadera, $(\forall n: n\in\mathbb{N})$.

Solución

Etapa 1. P.d.q. F(1) es verdadera.

En efecto

$$\left.\begin{array}{rcl} 1(1^2-1) & = & 1\cdot 0\\ & = & 0\\ & = & 24\cdot 0\end{array}\right\} \Longrightarrow 1(1^2-1)=24\cdot 0 \Longrightarrow \mathrm{F}(1) \text{ es verdadera.}$$

Etapa 2. Hipótesis de Inducción

Supongamos que $\mathrm{F}(n)$ es verdadera. Esto es

$$\begin{array}{rcl}
(n\in\mathbb{N}: n \text{ impar }) & \Longrightarrow & n(n^2-1) \text{ es divisible por } 24\\
& \Updownarrow & \\
(\exists s; s\in\mathbb{N})\wedge(\exists r; r\in\mathbb{N}) & : & n=(2s-1)\wedge(2s-1)((2s-1)^2-1)=24\cdot r\\
& \Updownarrow & \\
(\exists s; s\in\mathbb{N})\wedge(\exists r; r\in\mathbb{N}) & : & n=(2s-1)\wedge(2s-1)(4s^2-4s)=24\cdot r\\
& \Updownarrow & \\
(\exists s; s\in\mathbb{N})\wedge(\exists r; r\in\mathbb{N}) & : & n=(2s-1)\wedge 8s^3-12s^2+4s=24\cdot r \qquad (*)
\end{array}$$

Etapa 3. P.d.q. $\mathrm{F}(n+2)$ es verdadera. Esto es,

$$\begin{array}{rcl}
\text{p.d.q } (n+2\in\mathbb{N}: n \text{ impar }) & \Longrightarrow & (n+2)((n+2)^2-1) \text{ es divisible por } 24\\
& \Updownarrow & \\
\text{p.d.q } (\exists u; u\in\mathbb{N}) & : & n=(2s-1)\wedge(n+2)((n+2)^2-1)=24\cdot u\\
& \Updownarrow & \\
\text{p.d.q } (\exists u; u\in\mathbb{N}) & : & n=(2s-1)\wedge(2s+1)((2s+1)^2-1)=24\cdot u\\
& \Updownarrow & \\
\text{p.d.q } (\exists u; u\in\mathbb{N}) & : & n=(2s-1)\wedge(2s+1)(4s^2+4s)=24\cdot u\\
& \Updownarrow & \\
\text{p.d.q } (\exists u; u\in\mathbb{N}) & : & n=(2s-1)\wedge 8s^3+12s^2+4s=24\cdot u \qquad (**)
\end{array}$$

Entonces dividiendo (**) por (*) tenemos que

[1]Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

$$
\begin{array}{rlcll}
 & 8s^3+12s^2+4s & : & 8s^3-12s^2+4s & = \quad 1 \\
(-) & & & & \\
 & 8s^3-12s^2+4s & & & \\
 & -------- & & & \\
 & \quad 24s^2 & & &
\end{array}
$$

Así que,

$$
\begin{aligned}
8s^3+12s^2+4s &= 1\cdot(8s^3-12s^2+4s)+24s^2 \\
&\overset{(*)}{=} 24r+24s^2 \\
&= 24\underbrace{(r+s^2)}_{u}
\end{aligned}
$$

Luego, $\mathrm{F}(n+2)$ es verdadera y por tanto la fórmula proposicional $\mathrm{F}(n)$ es verdadera, para cada número natural impar.

(2.a) Sea $A=\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right\}\subset\mathbb{R}-\{0\}$ tal que:

(a) A es una progresión aritmética.

(b) $a+b\neq 0$, $a-b\neq 0$,$a+c\neq 0$ y $a-c\neq 0$

Demuestre que

$$\frac{a(a-c)}{(a-b)(a+c)}=1$$

Solución

$$
\begin{aligned}
A \text{ es una progresión aritmética} &\iff \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b} \\
&\iff \frac{2}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a} \\
&\iff \frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac} \\
&\iff b=\frac{2ac}{a+c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Luego,}\quad \frac{a(a-c)}{(a-b)(a+c)} &= \frac{a(a-c)}{(a-\frac{2ac}{a+c})(a+c)} \\
&= \frac{a(a-c)}{\left(\frac{a(a+c)-2ac}{a+c}\right)(a+c)} \\
&= \frac{a(a-c)}{(a^2+ac-2ac)} \\
&= \frac{a(a-c)}{(a^2-ac)} \\
&= \frac{a(a-c)}{a(a-c)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(2.b) Considere el desarrollo binomial

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^4}\right)^m \qquad (m \in \mathbb{N}) \qquad (*)$$

Si existe un término en $(*)$ que contiene a x^{-6t}, para algún $t \in \mathbb{N}$ entonces demuestre que m debe ser un múltiplo de 3.

Solución

Etapa 1 Supongamos que existe el término pedido, y que es de la forma t_{r+1}

Etapa 2 Datos.

(i) t_{r+1} es el término pedido si y sólo si $t_{r+1} = \binom{m}{r}(x^2)^{m-r}\left(\frac{-1}{x^4}\right)^r$

Es decir,

$$\begin{aligned} t_{r+1} &= \binom{m}{r} x^{(2m-2r)}\left(\frac{(-1)^r}{x^{4r}}\right) \\ &= \binom{m}{r}(-1)^r x^{(2m-6r)} \end{aligned}$$

(ii) t_{r+1} contiene a x^{-6t} si y sólo si $x^{(2m-6r)} = x^{(-6t)}$

Es decir,

$$\begin{aligned} x^{(2m-6r)} = x^{(-6t)} &\iff 2m - 6r = -6t \\ &\iff 2m = 6r - 6t \\ &\iff m = 3r - 3t \\ &\iff m = 3(r - t) \end{aligned}$$

Luego, m es un múltiplo de 3.

(3) Considere el homomorfismo de grupos $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $h(x,y,z) = (x+y+z, x-y-z)$.

(a) Determine $ker(h)$

Solución

$$\begin{aligned} u \in kerr(h) &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge h(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\iff u = (x,y,z) \wedge h(x,y,z) = (0,0) \\ &\iff u = (x,y,z) \wedge (x+y+z, x-y-z) = (0,0) \\ &\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad \begin{array}{rcl|} x+y+z & = & 0 \\ x-y-z & = & 0 \\ \hline \end{array} \\ &\iff u = (x,y,z) \quad \wedge \quad [x = 0 \wedge y + z = 0] \quad \text{(sumando y restando ambas ecuaciones)} \\ &\iff ker(h) = \{(x,y,z) \mid x = 0 \wedge y + z = 0\} \end{aligned}$$

(b) Define en $\mathbb{R}^3$ la relación $\Re$ como sigue: Para $u = (x, y, z)$ y $u' = (x', y', z')$ diremos que

$$u\Re u' \iff (u - u') = (x - x', y - y', z - z') \in ker(h)$$

Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia

Solución

(i) P.d.q. $\Re$ es reflexiva.

Esto es p.d.q. $[u\Re u \; (\forall u; u \in \mathbb{R}^3)]$ equivalentemente p.d.q. $(u - u) \in ker(h)$

Pero, $(\forall u; u \in \mathbb{R}^3)$ tenemos que $u - u = (0, 0, 0) \wedge [0 = 0 \wedge 0 + 0 = 0]$.

Así que $(u - u) \in ker(h)$ y $u\Re u \; (\forall u; u \in \mathbb{R}^3)$ y $\Re$ es una relación reflexiva.

(ii) P.d.q. $\Re$ es simétrica.Esto es

p.d.q. $[u\Re u' \Longrightarrow u'\Re u]$ equivalentemente p.d.q. $(u - u') \in ker(h) \Longrightarrow (u' - u) \in ker(h)$
En efecto

Si $u = (x, y, z)$ y $u' = (x', y', z')$ y $u\Re u'$ entonces

$$\begin{aligned}
u\Re u' &\Longrightarrow (u - u') \in ker(h) \\
&\Longrightarrow (x - x', y - y', z - z') \in ker(h) \\
&\Longrightarrow x - x' = 0 \wedge y - y' + z - z' = 0 \\
&\Longrightarrow x' = x \wedge y + z = y' + z' \\
&\Longrightarrow x' - x = 0 \wedge y' - y + z' - z = 0 \\
&\Longrightarrow (x' - x, y' - y, z' - z) \in ker(h) \\
&\Longrightarrow (u' - u) \in ker(h) \\
&\Longrightarrow u'\Re u
\end{aligned}$$

Así que $\Re$ es una relación simétrica

(iii) P.d.q. $\Re$ es transitiva.Esto es

p.d.q. $[(u\Re v) \wedge (v\Re w) \Longrightarrow u\Re w]$ equivalentemente

p.d.q. $(u - v) \in ker(h) \wedge (v - w) \in ker(h) \Longrightarrow (u - w) \in ker(h)$

En efecto

Si $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ entonces

$$
\begin{aligned}
(u\Re v)\wedge(v\Re w) &\Longrightarrow (u-v)\in ker(h)\wedge(v-w)\in ker(h)\\
&\Longrightarrow (u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)\in ker(h)\wedge(v_1-w_1,v_2-w_2,v_3-w_3)\in ker(h)\\
&\Longrightarrow [(u_1-v_1)=0\wedge(u_2-v_2)+(u_3-v_3)=0]\wedge[(v_1-w_1)=0\wedge(v_2-w_2)+(v_3-w_3)=0]\\
&\Longrightarrow (u_1-v_1)+(v_1-w_1)=0\wedge(u_2-v_2)+(u_3-v_3)+(v_2-w_2)+(v_3-w_3)=0\\
&\Longrightarrow (u_1-v_1)+(v_1-w_1)=0\wedge(u_2-v_2)+(v_2-w_2)+(u_3-v_3)+(v_3-w_3)=0\\
&\Longrightarrow (u_1-w_1)=0\wedge(u_2-w_2)+(u_3-w_3)=0\\
&\Longrightarrow (u_1-w_1,u_2-w_2,u_3-w_3)\in ker(h)\\
&\Longrightarrow (u-w)\in ker(h)\\
&\Longrightarrow u\Re w
\end{aligned}
$$

Así que $\Re$ es una relación transitiva y por ende es una relación de equivalencia.

(4) Sea $h:\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\longmapsto\mathbb{R}_3[x]$ tal que $h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}+a_{21}x+a_{12}x^2+a_{22}x^3$.

(a) Demuestre que h es un Isomorfismo de grupos.

Solución

Etapa 1. P.d.q. h es un homomorfismo de grupos. Esto es, p.d.q si $A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces $h(A+B)=h(A)+h(B)$

$$
A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\Longleftrightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\quad\wedge\quad B\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\Longleftrightarrow B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Downarrow\\
A+B &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}\\
&\Downarrow\\
h(A+B) &= h\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}\\
&= a_{11}+b_{11}+(a_{21}+b_{21})x+(a_{12}+b_{12})x^2+(a_{22}+b_{22})x^3\\
&= [a_{11}+a_{21}x+a_{12}x^2+a_{22}x^3]+[b_{11}+b_{21}x+b_{12}x^2+b_{22}x^3]\\
&= h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\\
&= h(A)+h(B)
\end{aligned}
$$

Luego, h es un homomorfismo de grupos.

Etapa 2. P.d.q h es inyectiva. Para ello, basta mostrar que $ker(h)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

Sea $A\in ker(h)$ entonces

$$\begin{aligned}
A \in ker(h) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h(A) = e_{\mathbb{R}_3[x]} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_{11} + a_{21}x + a_{12}x^2 + a_{22}x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_{11} = 0 \wedge a_{21} = 0 \wedge a_{12} = 0 \wedge a_{22} = 0 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Luego, h es inyectivo.

Etapa 3. P.d.q. h es sobreyectiva. Esto es p.d.q. $Img(h) = \mathbb{R}_3[x]$, equivalentemente hay que mostrar que $Img(h) \subset \mathbb{R}_3[x] \wedge \mathbb{R}_3[x] \subset Img(h)$.

Pero por definición de función tenemos que $Img(h) \subset \mathbb{R}_3[x]$, así que basta mostrar que $\mathbb{R}_3[x] \subset Img(h)$.

Lo anterior ocurre si y sólo si tiene solución en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, la ecuación. $h(A) = p(x)$, para $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ dado.

Entonces veamos si una tal ecuación tiene o no solución.

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ dado, y planteemos la ecuación.

$$\begin{aligned}
(\exists A; A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) : h(A) = p(x) &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_{11} + a_{21}x + a_{12}x^2 + a_{22}x^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_0 = a_{11} \wedge a_1 = a_{21} \wedge a_2 = a_{12} \wedge a_3 = a_{22} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
h(A) = p(x) &\iff A = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} \wedge h\begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3
\end{aligned}$$

Luego h es sobreyectiva y por tanto un isomorfismo de grupos.

(b) Determine h^{-1}

Solución
De la parte anterior del ejercicio sigue que;

$$h^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

En efecto.

$$\begin{aligned} (h \circ h^{-1})(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) &= h(h^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)) \\ &= h\begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \end{aligned}$$

Así que $h \circ h^{-1} = 1_{\mathbb{R}_3[x]}$

Recíprocamente

$$\begin{aligned} (h^{-1} \circ h)\begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} &= h^{-1}\left(h\begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= h^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \\ &= \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que $h^{-1} \circ h = 1_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}$