

Solución de la Prueba Acumulativa Semestral de Álgebra<sup>1</sup>  
Ingeniería Civil  
Profesor Ricardo Santander Baeza  
13 de Agosto del 2007

(1) Si  $A = \{3, u_2, u_3, 12, u_5, \dots\}$  es una Progresión Aritmética entonces demuestre que para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u_k = 3n \cdot 2^{n-1}$$

Solución

Etapla 1. P.d.q.  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u_k = 3n \cdot 2^{n-1}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$

Etapla 2. Gestión de la información

- (a)  $A$  es una progresión aritmética si y sólo si para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_k = a_1 + (k-1)d$
- $u_1 = 3 \implies u_k = 3 + (k-1)d$
  - $u_4 = 12 \implies 12 = 3 + 3d \implies d = 3 \implies u_k = 3k$

(b) Sustituyendo el resultado anterior tenemos que,

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u_k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3k = 3 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k \quad (*)$$

(c) Ahora aplicando las definiciones adecuadas tenemos que:

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{(n-k)!k!} = k \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k(k-1)!} = n \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n \binom{n-1}{k-1} \quad (**)$$

(d) Sustituyendo (\*\*) en (\*) tenemos que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u_k = 3n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \quad (***)$$

(e) Pero como

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u_k = 3n \cdot 2^{n-1}$$

(2) Sea  $h : \mathbb{R}_3[x] \mapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$  tal que  $h(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_3 - a_1 & a_0 + \lambda a_3 \\ (2\lambda - 1)(a_2 + a_3) & (\lambda + 3)a_2 \end{pmatrix}$

<sup>1</sup>Cada problema vale 1.5 puntos.  
Tiempo 120'

(a) Demuestre que  $h$  es un homomorfismo de grupos ( $\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R}$ )

Solución

Sean  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  y  $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ , debemos mostrar que

$$h(p(x) + q(x)) = h(p(x)) + h(q(x))$$

$$\begin{aligned} h(p(x) + q(x)) &= h(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3) \\ &= \begin{pmatrix} (a_3 + b_3) - (a_1 + b_1) & (a_0 + b_0) + \lambda(a_3 + b_3) \\ (2\lambda - 1)((a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)) & (\lambda + 3)(a_2 + b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_3 - a_1) & (a_0 + \lambda a_3) \\ (2\lambda - 1)((a_2 + a_3) & (\lambda + 3)a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b_3 - b_1) & (b_0 + \lambda b_3) \\ (2\lambda - 1)((b_2 + b_3) & (\lambda + 3)b_2 \end{pmatrix} \\ &= h(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + h(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) \\ &= h(p(x)) + h(q(x)) \end{aligned}$$

Luego,  $h$  es un homomorfismo para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(b) Determine el conjunto  $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ no es un isomorfismo}\}$

Solución

- Sabemos que para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$   $h$  es un homomorfismo.
- $h$  será un isomorfismo si y sólo si  $h$  es una función biyectiva.
- Así que para  $h$  no ser un Isomorfismo basta que no sea inyectiva o sobreyectiva.
- Como la inyectividad está determinada por el  $\ker(h)$  y la sobreyectividad por la  $\text{Im}(h)$ .
- Partiremos estudiando el  $\ker(h)$ .

$$\begin{aligned} p(x) \in \ker(h) &\iff p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \wedge h(p(x)) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge h(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge \begin{pmatrix} a_3 - a_1 & a_0 + \lambda a_3 \\ (2\lambda - 1)(a_2 + a_3) & (\lambda + 3)a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge \begin{cases} a_3 - a_1 & = 0 \\ a_0 + \lambda a_3 & = 0 \\ (2\lambda - 1)(a_2 + a_3) & = 0 \\ (\lambda + 3)a_2 & = 0 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Estudiemos el sistema obtenido en (\*)

Caso 1.  $(2\lambda - 1) = 0$  entonces (\*) se transforma en

$$\begin{cases} a_3 - a_1 & = 0 \\ a_0 + \frac{1}{2}a_3 & = 0 \\ (\frac{1}{2} + 3)a_2 & = 0 \end{cases} \wedge (a_2 = 0 \wedge a_1 = a_3 \wedge a_0 = -\frac{1}{2}a_3)$$

Así que  $p(x) = -\frac{1}{2}a_3 + a_3x + 0 \cdot x^2 + a_3x^3 \in \ker(h)$ , para cada  $a_3 \in \mathbb{R}$ . Por tanto  $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{S}$ , pues

$$\ker(h) = \{p(x) = -\frac{1}{2}a_3 + a_3x + 0 \cdot x^2 + a_3x^3; \mid a_3 \in \mathbb{R}\} \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Caso 2.  $(2\lambda - 1) \neq 0$  entonces (\*) se transforma en

$$\begin{cases} a_3 - a_1 & = 0 \\ a_0 + \lambda a_3 & = 0 \\ a_2 + a_3 & = 0 \\ (\lambda + 3)a_2 & = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Caso 2.1  $(2\lambda - 1) \neq 0 \wedge (\lambda + 3) = 0$  entonces (\*\*) se transforma en

$$\left. \begin{array}{l} a_3 - a_1 = 0 \\ a_0 - 3a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{array} \right\} \wedge (a_1 = a_3 \wedge a_0 = 3a_3 \wedge a_2 = -a_3)$$

Así que  $p(x) = 3a_3 + a_3x - a_3 \cdot x^2 + a_3x^3 \in \ker(h)$ , para cada  $a_3 \in \mathbb{R}$ . Por tanto  $\lambda = -3 \in \mathbb{S}$ , pues

$$\ker(h) = \{p(x) = 3a_3 + a_3x - a_3 \cdot x^2 + a_3x^3; | a_3 \in \mathbb{R}\} \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Caso 2.2  $(2\lambda - 1) \neq 0 \wedge (\lambda + 3) \neq 0$  entonces (\*\*) se transforma en

$$\left. \begin{array}{l} a_3 - a_1 = 0 \\ a_0 + \lambda a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{array} \right\} \wedge (a_2 = 0 \wedge a_3 = 0 \wedge a_0 = 0 \wedge a_1 = 0)$$

Así que  $p(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \in \ker(h)$ . Por tanto  $\lambda \neq -3 \notin \mathbb{S}$

Conclusión:  $= \mathbb{S} \left\{ -3, \frac{1}{2} \right\}$

(3) Dado el homomorfismo  $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mapsto \mathbb{R}^2$  tal que  $h \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - d, a + d)$ . Si definimos en  $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$  la relación

$$A \mathfrak{R} B \iff (A - B) \in \ker(h)$$

(a) Demuestre que  $\mathfrak{R}$  es una relación de equivalencia

Solución

- Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$  entonces  $h(A - A) = h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0)$ . Así que  $A \mathfrak{R} A$  y  $\mathfrak{R}$  es una relación reflexiva.
- Si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$  y  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$  entonces

$$\begin{aligned} A \mathfrak{R} B &\iff h(A - B) = (0, 0) \iff h \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} = (0, 0) \\ &\iff ((a_{11} - b_{11}) - (a_{22} - b_{22}), (a_{11} - b_{11}) + (a_{22} - b_{22})) = (0, 0) \\ &\iff \begin{array}{l} (a_{11} - b_{11}) - (a_{22} - b_{22}) = 0 \\ (a_{11} - b_{11}) + (a_{22} - b_{22}) = 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} -[(a_{11} - b_{11}) - (a_{22} - b_{22})] = 0 \\ -[(a_{11} - b_{11}) + (a_{22} - b_{22})] = 0 \end{array} \\ &\iff \begin{array}{l} (b_{11} - a_{11}) - (b_{22} - a_{22}) = 0 \\ (b_{11} - a_{11}) + (b_{22} - a_{22}) = 0 \end{array} \iff h \begin{pmatrix} b_{11} - a_{11} & b_{12} - a_{12} \\ b_{21} - a_{21} & b_{22} - a_{22} \end{pmatrix} = (0, 0) \\ &\iff h(B - A) = (0, 0) \\ &\iff B \mathfrak{R} A \end{aligned}$$

Así que  $\mathfrak{R}$  es una relación simétrica.

- Si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$  y  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$  y  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$  entonces

$$\begin{aligned} A \mathfrak{R} B \wedge B \mathfrak{R} C &\iff h(A - B) = (0, 0) \wedge h(B - C) = (0, 0) \\ &\implies (0, 0) = h(A - B) + h(B - C) = h(A - B + B - C) = h(A - C) \quad (\text{h es homomorfismo}) \\ &\implies A \mathfrak{R} C \end{aligned}$$

Luego,  $\mathfrak{R}$  es una relación transitiva, y con lo anterior es una relación de equivalencia.

(b) Demuestre que  $\overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \ker(h)$

## Solución

$$\begin{aligned}
A \in \ker(h) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h(A) = 0_{\mathbb{R}^2} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (0, 0) \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h \begin{pmatrix} a_{11} - 0 & a_{12} - 0 \\ a_{21} - 0 & a_{22} - 0 \end{pmatrix} = (0, 0) \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h(A - (0)) = (0, 0) \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A\mathfrak{R}(0) \\
&\iff A \in \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

Por tanto,  $\ker(h) = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

(4) Considere la circunferencia  $C$  y la línea recta  $L$ , definidas por:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0\} \wedge L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid by - (b-1)x - b(b+1) = 0; b \in \mathbb{R}\}$$

(a) Determine centro y radio de la circunferencia

## Solución

- Completamos cuadrados para determinar la ecuación canónica de la circunferencia

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0 &\iff x^2 - 6x + y^2 - 2y - 15 = 0 \\
&\iff x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 15 = 0 \\
&\iff (x - 3)^2 - 9 + (y - 1)^2 - 1 - 15 = 0 \\
&\iff (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25
\end{aligned}$$

- Luego, el centro es  $C = (3, 1)$  y el radio es  $r = 5$

(b) Determine  $\mathbb{S} = \{b \in \mathbb{R} \mid L \text{ sea tangente a } C \text{ en el punto } P = (0, 5)\}$

## Solución

- $P = (0, 5) \in C$  pues  $(0 - 3)^2 + (5 - 1)^2 = 25$

- $P = (0, 5) \in L \iff 5b - b(b+1) = 0 \iff 4b - b^2 = 0 \implies b = 0 \vee b = 4$

- Ahora la recta que pasa por el centro  $C = (3, 1)$  y el punto  $P = (0, 5)$  tiene pendiente  $m = -\frac{4}{3}$ , y esta recta debe ser perpendicular  $L$ , por tanto el producto de sus pendientes debe ser  $-1$ , es decir

$$-\frac{4}{3} \cdot \frac{b-1}{b} = -1 \quad (b \neq 0) \implies b = 4$$

Finalmente,  $\mathbb{S} = \{4\}$