

Álgebra¹ - Solución PAS
Profesor Ricardo Santander Baeza
29 de Septiembre del 2008

(1) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula:

$$F(n) : 3^{2(n+1)}5^{2n} - 3^{3(n+1)-1}2^{2n} \text{ es divisible por } 1.053 \text{ es verdadera } (\forall n : n \in \mathbb{N})$$

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $3^{2(n+1)}5^{2n} - 3^{3(n+1)-1}2^{2n}$ es divisible por 1.053 ($\forall n : n \in \mathbb{N}$)

Etapa 2. Gestión de la información

(a) Observamos que

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)}5^{2n} - 3^{3(n+1)-1}2^{2n} &= 3^{(2n+2)}5^{2n} - 3^{(3n+2)}2^{2n} \\ &= 9 \cdot 3^{2n}5^{2n} - 9 \cdot 3^{3n}2^{2n} \end{aligned}$$

$$\text{Así tenemos que } F(n) : 9 \cdot 3^{2n}5^{2n} - 9 \cdot 3^{3n}2^{2n}$$

(b) Por demostrar que $F(1)$ es verdadera.

En efecto

$$9 \cdot 3^{2 \cdot 1}5^{2 \cdot 1} - 9 \cdot 3^{3 \cdot 1}2^{2 \cdot 1} = 9 \cdot 9 \cdot 25 - 9 \cdot 27 \cdot 4 = 2025 - 972 = 1053 = 1053 \cdot 1. \text{ Así que } F(1) \text{ es verdadero.}$$

(c) Hipótesis de Inducción

Supongamos que $F(n)$ es verdadera, es decir asumimos que existe un número, digamos k tal que

$$9 \cdot 3^{2n}5^{2n} - 9 \cdot 3^{3n}2^{2n} = 1053 \cdot k \quad (H)$$

(d) Tesis de Inducción

Debemos demostrar que $F(n+1)$ es verdadera, es decir debemos probar que existe un número q tal que

$$9 \cdot 3^{2(n+1)}5^{2(n+1)} - 9 \cdot 3^{3(n+1)}2^{2(n+1)} = 1053 \cdot q$$

En efecto

En primer lugar,

$$\begin{aligned} 9 \cdot 3^{2(n+1)}5^{2(n+1)} - 9 \cdot 3^{3(n+1)}2^{2(n+1)} &= 9 \cdot 3^{(2n+2)}5^{(2n+2)} - 9 \cdot 3^{(3n+3)}2^{(2n+2)} \\ &= 81 \cdot 3^{2n} \cdot 25 \cdot 5^{2n} - 243 \cdot 3^{3n} \cdot 4 \cdot 2^{2n} \\ &= 2025 \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n} - 972 \cdot 3^{3n} \cdot 2^{2n} \end{aligned}$$

En segundo lugar,

¹Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

$$\begin{array}{r}
2025 \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n} - 972 \cdot 3^{3n} \cdot 2^{2n} \quad : \quad 9 \cdot 3^{2n} 5^{2n} - 9 \cdot 3^{3n} 2^{2n} = 225 \\
2025 \cdot 3^{2n} 5^{2n} - 2025 \cdot 3^{3n} 2^{2n} \\
\hline
1053 \cdot 3^{3n} 2^{2n}
\end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
2025 \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n} - 972 \cdot 3^{3n} \cdot 2^{2n} &= 225(9 \cdot 3^{2n} 5^{2n} - 9 \cdot 3^{3n} 2^{2n}) + 1053 \cdot 3^{3n} 2^{2n} \\
&\stackrel{H}{=} 225 \cdot 1053 \cdot k + 1053 \cdot 3^{3n} 2^{2n} \\
&= 1053 \underbrace{(225 \cdot k + 3^{3n} 2^{2n})}_q
\end{aligned}$$

Así que, $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

- (2) Si se tienen tres términos no nulos en progresión geométrica, y se resta 8 del segundo término se obtiene una progresión aritmética, y si en "esta progresión aritmética" se resta 64 del tercer término resulta nuevamente una progresión geométrica. Determine, si es posible, todas las progresiones involucradas en el problema.

Solución

Etapas 1. Sean $G = \{x, y, z\}$, $A = \{x, y-8, z\}$ y $G' = \{x, y-8, z-64\}$ las progresiones geométrica, aritmética y geométrica respectivamente, pedidas.

Etapas 2. Gestión de la información

- (a) G es una progresión geométrica si y sólo si existe $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ y $r \neq 1$ tal que

$$G = \{x, xr, xr^2\}$$

Luego,

$$A = \{x, xr - 8, xr^2\} \quad \wedge \quad G' = \{x, xr - 8, xr^2 - 64\}$$

- (b) $A = \{x, xr - 8, xr^2\}$ es una progresión aritmética si y sólo si $xr - 8 - x = xr^2 - (xr - 8)$, es decir:

$$\begin{aligned}
xr - 8 - x = xr^2 - (xr - 8) &\iff xr^2 - 2xr + x + 16 = 0 \\
&\iff x(1 - 2r + r^2) = -16
\end{aligned}$$

Luego,

$$x(1 - 2r + r^2) = -16 \tag{1}$$

(c) $G' = \{x, xr - 8, xr^2 - 64\}$ es una progresión geométrica si y sólo si

$$\begin{aligned} \frac{xr - 8}{x} = \frac{xr^2 - 64}{xr - 8} &\iff (xr - 8)^2 = x(xr^2 - 64) \\ &\iff x^2r^2 - 16xr + 64 = x^2r^2 - 64x \\ &\iff 64x - 16xr + 64 = 0 \\ &\iff 4x - xr + 4 = 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$x(4 - r) = -4 \tag{2}$$

Etapa 3. Conclusiones

Como la progresión geométrica es no nula entonces de las ecuaciones (1) y (2) sigue que

$$\begin{aligned} \frac{x(1 - 2r + r^2)}{x(16 - 4r)} = \frac{-16}{-16} &\implies \frac{(1 - 2r + r^2)}{(16 - 4r)} = 1 \\ &\implies 1 - 2r + r^2 = 16 - 4r \\ &\implies r^2 + 2r - 15 = 0 \\ &\implies (r + 5)(r - 3) = 0 \\ &\implies r = 3 \vee r = -5 \end{aligned}$$

Así que, tenemos dos casos:

Caso 1. Si $r = 3$ de (2) sigue que $x = -4$ y entonces

$$\begin{aligned} G &= \{x, xr, xr^2\} &= \{-4, -12, -36\} & \text{(Progresión geométrica de razón 3)} \\ A &= \{x, xr - 8, xr^2\} &= \{-4, -20, -36\} & \text{(Progresión aritmética de diferencia } -16) \\ G' &= \{x, xr - 8, xr^2 - 64\} &= \{-4, -20, -100\} & \text{(Progresión geométrica de razón 5)} \end{aligned}$$

Caso 2. Si $r = -5$ de (2) sigue que $x = -\frac{4}{9}$ y entonces

$$\begin{aligned} G &= \{x, xr, xr^2\} &= \left\{ -\frac{4}{9}, \frac{20}{9}, -\frac{100}{9} \right\} & \text{(Progresión geométrica de razón } -5) \\ A &= \{x, xr - 8, xr^2\} &= \left\{ -\frac{4}{9}, -\frac{52}{9}, -\frac{100}{9} \right\} & \left(\text{Progresión aritmética de diferencia } -\frac{48}{9} \right) \\ G' &= \{x, xr - 8, xr^2 - 64\} &= \left\{ -\frac{4}{9}, -\frac{52}{9}, -\frac{676}{9} \right\} & \left(\text{Progresión geométrica de razón } \frac{13}{9} \right) \end{aligned}$$

(3) Demuestre que el coeficiente de x^3 en el desarrollo binomial $(2 + 2x + x^2)^n$. Es de la forma

$$\frac{n(n^2 - 1)2^{n-1}}{3}$$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar el coeficiente de x^3 en el desarrollo binomial $(2 + 2x + x^2)^n$

Etapa 2. Gestión de la información

(a) Del teorema del binomio sigue que

$$\begin{aligned}
 (2 + 2x + x^2)^n &= ((2 + 2x) + x^2)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2 + 2x)^{n-k} (x^2)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (1 + x)^{n-k} (x^2)^k \\
 &= \binom{n}{0} 2^n (1 + x)^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} (1 + x)^{n-1} x^2 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (1 + x)^{n-k} (x^2)^k \\
 &= 2^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + n 2^{n-1} x^2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (1 + x)^{n-k} x^{2k}
 \end{aligned}$$

Luego del desarrollo obtenemos que

$$\begin{aligned}
 2^n \binom{n}{3} x^3 + n 2^{n-1} x^2 \binom{n-1}{1} x &= \left(2^n \binom{n}{3} + n 2^{n-1} \binom{n-1}{1} \right) x^3 \\
 &= 2^{n-1} \left(2 \binom{n}{3} + n \binom{n-1}{1} \right) x^3 \\
 &= 2^{n-1} \left(2 \frac{n!}{3!(n-3)!} + n(n-1) \right) x^3 \\
 &= 2^{n-1} \left(2 \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{6(n-3)!} + n(n-1) \right) x^3 \\
 &= 2^{n-1} \left(\frac{(n-2)(n-1)n}{3} + n(n-1) \right) x^3 \\
 &= 2^{n-1} (n-1)n \left(\frac{(n-2)}{3} + 1 \right) x^3 \\
 &= 2^{n-1} (n-1)n \left(\frac{(n-2+3)}{3} \right) x^3 \\
 &= 2^{n-1} \frac{n(n-1)(n+1)}{3} x^3 \\
 &= 2^{n-1} \frac{n(n^2-1)}{3} x^3
 \end{aligned}$$

Por tanto el coeficiente de x^3 es $\left[2^{n-1} \frac{n(n^2-1)}{3} \right]$

(4) Considere la función $h : (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2), +) \mapsto (\mathbb{R}_2[x], +)$ definida por: $h \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-d) + (b-c)x + dx^2$

(a) Demuestre que h es un homomorfismo

Solución

Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} h(A+B) &= h\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}\right) \\ &= ((a+a') - (d+d')) + ((b+b') - (c+c'))x + (d+d')x^2 \\ &= (a-d) + (b-c)x + dx^2 + (a'-d') + (b'-c')x + d'x^2 \\ &= h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + h\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \\ &= h(A) + h(B) \end{aligned}$$

Así que h es un homomorfismo de grupos.

(b) Demuestre que h no es inyectivo

En efecto

$$\begin{aligned} A \in \ker(h) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h(A) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0 + 0x + 0x^2 \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (a-d) + (b-c)x + dx^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (a-d) = 0 \wedge (b-c) = 0 \wedge d = 0 \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = d = 0 \wedge b = c \\ &\iff A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \wedge b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Así que

$$\ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Por tanto, h no es inyectivo.

(c) Si definimos en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ la relación

$$A \mathfrak{R} B \iff (A - B) \in \ker(h)$$

Demuestre que \mathfrak{R} es simétrica

Solución

Consideremos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y supongamos que $A \mathfrak{R} B$ entonces

$$\begin{aligned}
A\mathcal{R}B &\implies (A - B) \in \ker(h) \\
&\implies \begin{pmatrix} a - a' & b - b' \\ c - c' & d - d' \end{pmatrix} \in \ker(h) \\
&\implies a - a' = 0 \wedge d - d' = 0 \wedge b - b' = c - c' \\
&\implies a' - a = 0 \wedge d' - d = 0 \wedge b' - b = c' - c \\
&\implies a' - a = 0 \wedge d' - d = 0 \wedge b' - b = c' - c \\
&\implies \begin{pmatrix} a' - a & b' - b \\ c' - c & d' - d \end{pmatrix} \in \ker(h) \\
&\implies (B - A) \in \ker(h) \\
&\implies B\mathcal{R}A
\end{aligned}$$

Luego, h es una relación simétrica