

Álgebra¹ - Solución Prueba Acumulativa Semestral
Profesor Ricardo Santander Baeza
24 de Agosto del 2009

(1) Si $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ es una función tal que $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$ entonces

(a) Usando inducción matemática muestre que

$$f^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+n & b \\ c & d+n \end{pmatrix} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N}) \quad (\text{donde, } f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \text{ (} n \text{ veces)}) \quad (1)$$

En efecto

- Para $n = 1$ tenemos que

$$f^1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$$

Así que,

$$f^1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

y por tanto la fórmula es verdadera para $n = 1$

- Supongamos como hipótesis de inducción que

$$f^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+n & b \\ c & d+n \end{pmatrix} \quad (3)$$

- Ahora mostremos que la fórmula es verdadera para $n + 1$, es decir verifiquemos que

$$f^{n+1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+(n+1) & b \\ c & d+(n+1) \end{pmatrix} \quad (4)$$

En efecto

$$\begin{aligned} f^{n+1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= (f^n \circ f^1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= f^n \left(f^1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} f^n \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(3)}{=} f^n \begin{pmatrix} (a+1)+n & b \\ c & (d+1)+n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+(n+1) & b \\ c & d+(n+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que (4) es verdadera, y por ende (1) es verdadera

¹Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

(b) Demuestre que f^n es una función biyectiva ($\forall n; n \in \mathbb{N}$).

Conforme a nuestras definiciones y teoremas estudiados en clases tenemos al menos dos alternativas, para probar la afirmación propuesta:

Alternativa 1. Usaremos el teorema o "herramienta maestra" que dice f^n será biyectiva si existe para cada $n \in \mathbb{N}$ su inversa, digamos $(f^n)^{-1}$. En esta dirección define

$$f^{-n} : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \text{ tal que } f^{-n} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-n & b \\ c & d-n \end{pmatrix}$$

Ahora, verificamos directamente que

$$\begin{array}{l} (f^n \circ f^{-n}) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f^n \left(f^{-n} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \\ = f^n \begin{pmatrix} a-n & b \\ c & d-n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a-n+n & b \\ c & d-n+n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (f^{-n} \circ f^n) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f^{-n} \left(f^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \\ = f^{-n} \begin{pmatrix} a+n & b \\ c & d+n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a+n-n & b \\ c & d+n-n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Luego,

$$\left. \begin{array}{l} (f^{-n} \circ f^n) = 1_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \\ (f^n \circ f^{-n}) = 1_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \end{array} \right\} \implies f^{-n} = (f^n)^{-1}$$

Alternativa 2. Demostramos directamente que f^n es inyectiva y sobreyectiva, usando sus propias definiciones.

En efecto

Para la inyectividad hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f^n \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} &\implies \begin{pmatrix} a+n & b \\ c & d+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'+n & b' \\ c' & d'+n \end{pmatrix} \\ &\implies (a+n = a'+n) \wedge b = b' \wedge c = c' \wedge (d+n = d'+n) \\ &\implies a = a' \wedge b = b' \wedge c = c' \wedge d = d' \\ &\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto f^n es inyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$

Para la sobreyectividad, dado que $Img(f^n) \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces sólo resta mostrar que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \subset Img(f^n)$.

Luego, debemos resolver la ecuación $f^n(X) = A$ en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ para $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ dada. Es decir debemos resolver la ecuación

$$f^n \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A$$

Entonces

$$\begin{aligned} f^n \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\implies \begin{pmatrix} x_1 + n & x_2 \\ x_3 & x_4 + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\implies (x_1 + n = a) \wedge x_2 = b \wedge x_3 = c \wedge (x_4 + n = d) \\ &\implies (x_1 = a - n) \wedge x_2 = b \wedge x_3 = c \wedge (x_4 = d - n) \end{aligned}$$

Verificamos como corresponde, (no olvide lo que le ha pasado a los Ingenieros que no han verificado la factibilidad de sus proyectos).

$$f^n \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = f^n \begin{pmatrix} a - n & b \\ c & d - n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - n + n & b \\ c & d - n + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Luego,

$$f^n \begin{pmatrix} a - n & b \\ c & d - n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \subset \text{Img}(f^n) = \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \subset \text{Img}(f^n)$$

Y f^n es sobreyectiva, y por ende biyectiva.

- (2) Si $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ es una progresión aritmética y $S_j = \sum_{i=1}^{n_j} a_i$, para $j = 1, 2, 3$ entonces demuestre que

$$\frac{(n_2 - n_3)}{n_1} S_1 + \frac{(n_3 - n_1)}{n_2} S_2 + \frac{(n_1 - n_2)}{n_3} S_3 = 0 \quad (5)$$

Solución

- (a) Como $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ es una progresión aritmética entonces

$$S_j = \frac{n_j}{2} (a_1 + a_{n_j}) \quad (j = 1, 2, 3)$$

- (b) Así que, si hacemos $S = \frac{(n_2 - n_3)}{n_1} S_1 + \frac{(n_3 - n_1)}{n_2} S_2 + \frac{(n_1 - n_2)}{n_3} S_3$ entonces

$$\begin{aligned} S &= \frac{(n_2 - n_3)}{2} (a_1 + a_{n_1}) + \frac{(n_3 - n_1)}{2} (a_1 + a_{n_2}) + \frac{(n_1 - n_2)}{2} (a_1 + a_{n_3}) \\ &= \frac{n_2 a_1}{2} - \frac{n_3 a_1}{2} + \frac{n_2 a_{n_1}}{2} - \frac{n_3 a_{n_1}}{2} + \frac{n_3 a_1}{2} - \frac{n_1 a_1}{2} + \frac{n_3 a_{n_2}}{2} - \frac{n_1 a_{n_2}}{2} + \frac{n_1 a_1}{2} - \frac{n_2 a_1}{2} + \frac{n_1 a_{n_3}}{2} - \frac{n_2 a_{n_3}}{2} \\ &= \frac{n_2 a_{n_1}}{2} - \frac{n_3 a_{n_1}}{2} + \frac{n_3 a_{n_2}}{2} - \frac{n_1 a_{n_2}}{2} + \frac{n_1 a_{n_3}}{2} - \frac{n_2 a_{n_3}}{2} \\ &= \frac{n_2(a_1 + (n_1 - 1)d)}{2} - \frac{n_3(a_1 + (n_1 - 1)d)}{2} + \frac{n_3(a_1 + (n_2 - 1)d)}{2} - \frac{n_1(a_1 + (n_2 - 1)d)}{2} + \\ &\quad \frac{n_1(a_1 + (n_3 - 1)d)}{2} - \frac{n_2(a_1 + (n_3 - 1)d)}{2} \\ &= \frac{1}{2} (n_2 a_1 + n_2 n_1 d - n_2 d - n_3 a_1 - n_3 n_1 d + n_3 d + n_3 a_1 + n_3 n_2 d - n_3 d - n_1 a_1 - n_1 n_2 d + n_1 d + \\ &\quad n_1 a_1 + n_1 n_3 d - n_1 d - n_2 a_1 - n_2 n_3 d + n_2 d) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (3) Si consideramos la función $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ definida por $h \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & a - b \\ c - b & d - a \end{pmatrix}$ entonces

(a) Muestre que h es un homomorfismo de grupos

Solución

$$\begin{aligned}
 h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= h\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (a+a') - (b+b') & (a+a') - (b+b') \\ (c+c') - (b+b') & (d+d') - (a+a') \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (a-b) + (a'-b') & (a-b) + (a'-b') \\ (c-b) + (c'-b') & (d-a) + (d'-a') \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (a-b) & (a-b) \\ (c-b) & (d-a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (a'-b') & (a'-b') \\ (c'-b') & (d'-a') \end{pmatrix} \\
 &= h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Luego, h es un homomorfismo de grupos

(b) Además demuestre que la relación

$$A \mathfrak{R} B \iff (A - B) \in \ker(h)$$

es una relación transitiva en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

Solución

Debemos recordar que como h es un homomorfismo de grupos entonces $\ker(h) = \{C \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid h(C) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\}$, así que

$$A \mathfrak{R} B \iff (A - B) \in \ker(h) \iff h(A - B) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}$$

Con esto en mente procedemos a mostrar que \mathfrak{R} es una relación transitiva:

Si $A \mathfrak{R} B \wedge B \mathfrak{R} C$ entonces conforme a lo anterior

$$\left. \begin{array}{l} A \mathfrak{R} B \iff h(A - B) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \\ B \mathfrak{R} C \iff h(B - C) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \end{array} \right\} \implies h(A - C) = h(A - B + B - C) = h(A - B) + h(B - C) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}$$

Luego, $A \mathfrak{R} C$ y entonces \mathfrak{R} es una relación transitiva.

$$(4) \text{ Si } A = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 8 & 16 \\ 2 & x+4 & 8 & 16 \\ 2 & 4 & x+8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & x+16 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4) \text{ entonces determine el conjunto}$$

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

Solución

$$\begin{aligned}
 x \in \mathbb{S} &\iff x \in \mathbb{R} \wedge A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \\
 &\iff x \in \mathbb{R} \wedge \det(A) = 0
 \end{aligned}$$

entonces procedemos ahora, a calcular $\det(A)$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 8 & 16 \\ 2 & x+4 & 8 & 16 \\ 2 & 4 & x+8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & x+16 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 2 & 4 & 8 & x+16 \end{pmatrix}$$

Si $x = 0$ entonces $\det(A) = 0$ y $0 \in \mathbb{S}$

Si $x \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 2 & 4 & 8 & x+16 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & 4 & 8 & x+18 \end{pmatrix} \\ &= x \det \begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & -x \\ 4 & 8 & x+18 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & -x \\ 0 & 8 & x+22 \end{pmatrix} \\ &= x^2 \det \begin{pmatrix} x & -x \\ 8 & x+22 \end{pmatrix} = x^2(x^2 + 30x) = x^3(x + 30) \end{aligned}$$

Así que

$$\mathbb{S} = \{0, -30\}$$