Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep Nº 1 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
08 de Mayo del 2004

(1) Si p y q son proposiciones entonces demuestre usando una tabla de verdad que la proposición:

$$(p \Longrightarrow q) \quad \Longleftrightarrow \quad [(p \wedge \sim q) \Longrightarrow (r \wedge \sim r)] \quad \text{Es una Tautología}$$

Solución

Construyamos la tabla de verdad.

p	q	r	$\sim q$	$(p \Longrightarrow q)$	$\Longleftrightarrow$	$p \wedge \sim q$	$\Longrightarrow$	$r \wedge \sim r$
1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0

Luego, la proposición es una tautología.

(2) Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\} \subset \mathbb{R}$, tal que:

(a) $a_i = i$ para $i = 1, 2$

(b) $a_s = \displaystyle\sum_{i=1}^{s-1} a_i \quad (s \geq 3)$

Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula

$F(n): \quad a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N}; n \geq 3)$

Solución

Etapa 1 P.d.q. $F(3)$ es verdadera.

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3 = 3 \cdot 2^{3-3}$$

Etapa 2 Hipótesis de Inducción

[1]Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Supongamos que $F(n)$ es verdadera. e.e
$a_n = 3 \cdot 2^{n-3} \qquad\qquad (H)$

Etapa 3 Tesis de Inducción

P.d.q. $F(n+1)$ es verdadera. e.e.

p.d.q.

$$a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-2}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdot + a_3 + a_2 + a_1 \\
&\overset{(H)}{=} 3 \cdot 2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-4} + 3 \cdot 2^{n-5} + 3 \cdot 2^{n-6} + 3 \cdot 2^{n-7} + \cdots + 3 + 3 \\
&= 3(2^{n-3} + 2^{n-4} + 2^{n-5} + 2^{n-6} + 2^{n-7} + \cdots + 1) + 3 \\
&= 3 \cdot \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} + 3 \quad (\text{suma de una progresión geométrica}) \\
&= 3 \cdot 2^{n-2} - 3 + 3 \\
&= 3 \cdot 2^{n-2}
\end{aligned}$$

Así que, $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(3) Si $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ tal que satisface las siguientes propiedades:

(a) A es una Progresión Aritmética
(b) a, b y c son los coeficientes de una ecuación cuadrática. es decir $ax^2 + bx + c = 0 \qquad (*)$
(c) $\frac{1}{3}(a + b + c) = x_1 + x_2$
(d) $x_1 \cdot x_2 + 7 = b$. Donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática (*)

entonces determine los números a, b y c.

Solución

Etapa 1 sea $A = \{a, b, c\}$ el conjunto pedido.

Etapa 2 Datos

(i) A es una progresión aritmética si:

$$a = b - d \quad \text{y} \quad c = b + d$$

Donde d es la diferencia de la progresión aritmética.

(ii)Las raíces de una ecuación de segundo grado son de la forma:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Así que,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{b}{a} & = & \dfrac{1}{3}(b-d+b+b+d) \\ & \Downarrow & \\ -\dfrac{b}{a} & = & b \\ & \Downarrow & \\ a & = & -1 \end{array}$$

Luego,

$$b = d-1 \quad \text{y} \quad c = 2d-1$$

Además,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{c}{a}+7 & = & b \\ & \Downarrow & \\ \dfrac{2d-1}{-1}+7 & = & d-1 \\ & \Downarrow & \\ 8-2d & = & d-1 \\ & \Downarrow & \\ d & = & 3 \end{array}$$

Etapa 3 Finalmente sustituyendo tenemos que:

$$a=-1; \quad b=2 \quad \text{y} \quad c=5$$

(4) Suponga que:

(i) $A = \left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$ y $B = \left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$, son dos desarrollos binomiales con ($n \in \mathbb{N}$).

(ii) $t_k(A)$ es el k- estimo término de A y $t_k(B)$ es el k- ésimo término de B.

Demuestre que

$$t_k(A) = t_k(B) \Longrightarrow n \text{ es un número par}$$

Solución

Etapa 1 P.d.q. que $n = 2 \cdot s$, para algún entero s.

Etapa 2 Datos

(i) Para el binomio A tenemos que:

$$\begin{aligned} t_k(A) &= \binom{n}{k-1}(x^2)^{n-(k-1)} \cdot \frac{1}{x^{k-1}} \\ &= \binom{n}{k-1}(x)^{2n-3(k-1)} \end{aligned}$$

(ii) Para el binomio B tenemos que:

$$\begin{aligned} t_k(B) &= \binom{n}{k-1}(x^3)^{n-(k-1)} \cdot \frac{1}{(x^2)^{k-1}} \\ &= \binom{n}{k-1}(x)^{3n-5(k-1)} \end{aligned}$$

(iii)Además,

$$\begin{array}{rcl} t_k(A) = t_k(B) & \Longleftrightarrow & \binom{n}{k-1}(x)^{2n-3(k-1)} = \binom{n}{k-1}(x)^{3n-5(k-1)} \\ & \Downarrow & \\ (x)^{2n-3(k-1)} & = & (x)^{3n-5(k-1)} \\ & \Downarrow & \\ 2n-3(k-1) & = & 3n-5(k-1) \\ & \Downarrow & \\ n & = & 2\underbrace{(k-1)}_{s} \end{array}$$

Así que n es par.