Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep N^o 1 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
06 de Julio del 2005

(1) Demuestre justificando paso a paso, (usando propiedades no tablas de verdad), la siguiente proposición es verdadera:

$$\sim [\{(\sim q \Longrightarrow \sim p) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)] \Longrightarrow (p \wedge r)$$

Solución

Etapa 1. P.d.q. $\sim [\{(\sim q \Longrightarrow \sim p) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)] \Longrightarrow (p \wedge r)$

Etapa 2. Análisis de datos y supuestos.

Si $w = [\{(\sim q \Longrightarrow \sim p) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)]$ entonces

$$\begin{array}{lcll}
w & \Longleftrightarrow & [\{(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)] & \left(x \Longrightarrow y \overset{\text{Tautología}}{\Longleftrightarrow} \sim y \Longrightarrow \sim x\right) \\
 & \Longleftrightarrow & [\{(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s)\} \wedge (s \Longrightarrow \sim q)] & \left(x \Longrightarrow y \overset{\text{Tautología}}{\Longleftrightarrow} y \vee \sim x\right) \\
 & \Longleftrightarrow & [(p \Longrightarrow q) \wedge \{(r \Longrightarrow s) \wedge (s \Longrightarrow \sim q)\}] & (\text{Asociatividad de } \wedge) \\
 & \Longrightarrow & [(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow \sim q)] & (\text{Transitividad de } \wedge) \\
 & \Longrightarrow & [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow \sim r)] & \left(\left[x \Longrightarrow y \overset{\text{Tautología}}{\Longleftrightarrow} \sim y \Longrightarrow \sim x\right]; [\sim (\sim x) = x]\right) \\
 & \Longrightarrow & [(p \Longrightarrow \sim r)] & (\text{Transitividad de } \wedge) \\
 & \Longrightarrow & [(\sim r \vee \sim p)] & (\text{Transitividad de } \wedge) \\
 & \Downarrow & & \\
\sim w & = & \sim (\sim r \vee \sim p) & \\
 & \Downarrow & & \\
\sim w & = & r \ \wedge p & \text{De Morgan}
\end{array}$$

(2) Demuestre usando Inducción Matemática que

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

$F(n) = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ es divisible por 14, $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

Solución

Etapa 1. P.d.q. $F(1)$ es verdadera.

$$\begin{aligned} 3^{4\cdot 1+2} + 5^{2\cdot 1+1} &= 3^6 + 5^3 \\ &= 854 \\ &= 14 \cdot 61 \end{aligned}$$

Luego, $F(1)$ es verdadera.

Etapa 2. Hipótesis de Inducción
Supongamos que $F(n)$ es verdadera. e.e. existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$3^{4n+2} + 5^{2n+1} = 14 \cdot t \qquad (H)$$

Etapa 3. Tesis de Inducción

P.d.q. $F(n+1)$ es verdadera. e.e. p.d.q. existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$3^{4(n+1)+2} + 5^{2(n+1)+1} = 14 \cdot q \Longleftrightarrow 3^{4n+6} + 5^{2n+3} = 14 \cdot q$$

En efecto

$$\begin{array}{ll} & 3^{4n+6} + 5^{2n+3} : 3^{4n+2} + 5^{2n+1} = 3^4 \\ (-) & \\ & 3^{4n+6} + 3^4 \cdot 5^{2n+1} \\ & ----------- \\ & 5^{2n+3} - 3^4 \cdot 5^{2n+1} \end{array} \Longrightarrow 3^{4n+6} + 5^{2n+3} = 3^4 \underbrace{(3^{4n+2} + 5^{2n+1})}_{\substack{= \\ 14\cdot t \\ \text{Por } (H)}} + 5^{2n+3} - 3^4 \cdot 5^{2n+1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 3^{4n+6} + 5^{2n+3} &\overset{(H)}{=} 3^4 \cdot 14 \cdot t + 25 \cdot 5^{2n+1} - 81 \cdot 5^{2n+1} \\ &= 3^4 \cdot 14 \cdot t - 56 \cdot 5^{2n+1} \\ &= 3^4 \cdot 14 \cdot t - 14 \cdot 4 \cdot 5^{2n+1} \\ &= 14 \underbrace{(3^4 \cdot t - 4 \cdot 5^{2n+1})}_{q} \end{aligned}$$

Así que la etapa $F(n+1)$ es verdadera y entonces la fórmula $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{Z})$.

(3) Si $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$ una Progresión Aritmética tal que

- Su primer término es 5
- Su diferencia es 7

entonces demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k = -2\,(2^n - 1) + 7\,n\,2^{n-1}$

Sugerencia: Use el teorema del binomio y las propiedades de las sumatorias.

Solución

Etapa 1. P.d.q. para cada $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k = -2\,(2^n - 1) + 7\,n\,2^{n-1}$

Etapa 2. Datos

(i) Como A es una progresión aritmética entonces existe $d \in \mathbb{R}$ (la diferencia de la progresión) tal que $a_n = a_1 + (n-1)d$. Así que $A = \{a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \cdots\}$

(ii) Como $a_1 = 5$ y $d = 7$ entonces $a_n = 5 + 7(n-1) = -2 + 7n \quad (\forall n; n \in \mathbb{N}) \qquad (1)$

Etapa 3. Ejecución

(i) De (1), sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-2 + 7k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-2) \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} (7k) \binom{n}{k} \\
&= -2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + 7 \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \qquad (2)
\end{aligned}$$

(ii) Como $2^s = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j}$ entonces

$$2^s = \binom{s}{0} + \sum_{j=1}^{s} \binom{s}{j} \Longleftrightarrow 2^s = 1 + \sum_{j=1}^{s} \binom{s}{j}$$

Luego,

$$2^s - 1 = \sum_{j=1}^{s} \binom{s}{j} \qquad (3)$$

(iii) Además de la definición de $\binom{n}{k}$, sigue que

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}k &= \frac{n!}{(n-k)! \quad k!}\,k \\
&= \frac{n!}{(n-k)! \quad (k-1)!\,k}\,k \\
&= \frac{n!}{(n-k)! \quad (k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!\,n}{(n-k)! \quad (k-1)!} \\
&= \binom{n-1}{k-1}n
\end{aligned}$$

Así que,

$$\binom{n}{k}k = \binom{n-1}{k-1}n \qquad (4)$$

(iv) Finalmente, sustituyendo (3) y (4) en (2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a_k &= -2(2^n-1)+7\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}n \\
&= -2(2^n-1)+7\sum_{u=0}^{n-1}\binom{n-1}{u}n \qquad \text{(haciendo } u=k-1\text{)} \\
&= -2(2^n-1)+7n\sum_{u=0}^{n-1}\binom{n-1}{u} \\
&= -2(2^n-1)+7n(2^{n-1})
\end{aligned}$$

(4) Define en $\mathbb{Z}$ la relación $\Re$, como sigue:

$$x\Re y \iff x^2-y^2=y-x$$

(a) Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia

Solución

$\Re$ es una relación de equivalencia si $\Re$ es una relación reflexiva (refleja), simétrica y transitiva.

- P.d.q. $\Re$ es una relación refleja

  En efecto

$$x^2-x^2=0=x-x \ (\forall x; x\in\mathbb{Z}) \implies x^2-x^2=x-x \implies x\Re x \ (\forall x; x\in\mathbb{Z})$$

  Así que $\Re$ es una relación refleja.

- P.d.q. $\Re$ es una relación simétrica

  En efecto

  Si $x\Re y$ entonces

$$\begin{aligned} x\Re y &\iff x^2 - y^2 = y - x \\ &\implies -(x^2 - y^2) = -(y - x) \\ &\implies y^2 - x^2 = x - y \\ &\implies y\Re x \end{aligned}$$

  Así que $\Re$ es una relación simétrica.

- P.d.q. $\Re$ es una relación transitiva

  En efecto

  Si $x\Re y \wedge y\Re z$ entonces

$$\left.\begin{array}{lcl} x\Re y & \iff & x^2 - y^2 = y - x \\ y\Re z & \iff & y^2 - z^2 = z - y \end{array}\right| \begin{aligned} &\implies (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (y - x) + (z - y) \\ &\implies x^2 - z^2 = z - x \\ &\implies x\Re z \end{aligned}$$

  Así que $\Re$ es una relación transitiva.

(b) Determine explícitamente los elementos de la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{Z}$, $\bar{x}$.

Solución

Recordemos que $\bar{x} = \{u \in \mathbb{Z} \mid u\Re x\}$. Así que,

$$\begin{aligned} u \in \bar{x} &\iff u \in \mathbb{Z} \wedge u\Re x \\ &\iff u \in \mathbb{Z} \wedge u^2 - x^2 = x - u \\ &\iff u \in \mathbb{Z} \wedge u^2 + u + (-x^2 - x) = 0 \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-x^2 - x)}}{2} \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4x^2 + 4x}}{2} \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge u = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 2x)^2}}{2} \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge u = \frac{-1 \pm (1 + 2x)}{2} \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge \left[u = \frac{-1 + (1 + 2x)}{2} \vee u = \frac{-1 - (1 + 2x)}{2}\right] \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge \left[u = \frac{2x}{2} \vee u = \frac{-2 - 2x}{2}\right] \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge [u = x \vee u = -1 - x] \end{aligned}$$

Así que $\bar{x} = \{x, -1 - x\}$