Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil Industrial

Solución Pep N^o 1 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
14 de mayo del 2007

(1) Sean p, q y r proposiciones lógicas y considere la nueva proposición lógica.

$$[(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)] \Longrightarrow [(q \Longrightarrow p) \wedge (p \Longrightarrow r)] \qquad (*)$$

1.1 Pruebe usando una tabla de verdad que la proposición $(*)$ es una Tautología.

Solución

p	q	r	$p \vee q$	$\Longleftrightarrow$	$p \wedge r$	$\Longrightarrow$	$q \Longrightarrow p$	$\wedge$	$p \Longrightarrow r$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1

Luego $(*)$ es una **Tautología**.

1.2 Pruebe usando propiedades, (y no tabla de verdad) que $(*)$ es una Tautología.

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que $(*)$ es una Tautología usando sólo propiedades. Es decir, si concordamos en hacer $A = [(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)]$ y $B = [(q \Longrightarrow p) \wedge (p \Longrightarrow r)]$ entonces debemos mostrar que

$$A \Longrightarrow B \qquad (**)$$

Etapa 2. Gestión de la información.

(a) Como $(**)$ es una implicación, la única forma de ser falsa es que A sea verdadera y B sea Falsa, esto por definición del conectivo implicación.

(b) Ahora como B es una conjunción entonces ella es falsa si $(q \Longrightarrow p)$ es falsa ó $(p \Longrightarrow r)$ es falsa

(c) Es interesante observar aquí que p aparece en ambas implicaciones que originan a B, como consecuente y com antecedente respectivamente, así que estudiemos las posibilidades de p.

(d) Si p es verdadero entonces

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

(i) $(q \Longrightarrow p)$ es verdadero, una vez más, por definición de implicación.

(ii) Como B es falsa entonces por lo dicho antes $(p \Longrightarrow r)$ es falsa, y entonces de nuevo por definición de implicación r es falsa

(iii) Luego tenemos que p es verdadera y r es falsa, pero entonces ahora analizando A, observamos que:

- p verdadera hace que $(p \vee q)$ sea verdadera por definición de suma lógica o disyunción.
- r falsa hace que $(p \wedge r)$ sea falsa por definición de producto lógico o conjunción.
- Así que juntando la información hace que $A = [(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)]$ sea falsa lo que es una contradicción.

(e) Si p es falso entonces

(i) $(p \Longrightarrow r)$ es verdadero, una vez más, por definición de implicación.

(ii) Como B es falsa entonces por lo dicho antes $(q \Longrightarrow p)$ es falsa, y entonces de nuevo por definición de implicación q es verdadera

(iii) Luego tenemos que p es falsa y q es verdadera, pero entonces ahora analizando A, observamos que:

- p falsa hace que $(p \wedge r)$ sea falsa por definición de producto lógico o conjunción.
- q verdadera hace que $(p \vee q)$ sea verdadera por definición de suma lógica o disyunción.
- Así que juntando la información hace que $A = [(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)]$ sea falsa lo que nuevamente es una contradicción.

(f) conclusión B no puede ser falsa y entonces $(*)$ es verdadera.

(2) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula proposicional

$$F(n): \qquad 3^{2n+1} + 2^{n+2} + 7^n;\ \text{es divisible por 7 es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

Solución

Etapa 1. Demostremos que $F(1)$ es verdadera.

$$\begin{aligned} 3^{2\cdot 1+1} + 2^{1+2} + 7^1 &= 3^3 + 2^3 + 7^1 \\ &= 27 + 8 + 7 \\ &= 42 \\ &= 7 \cdot 6 \end{aligned}$$

Luego, $7|42$, e.e 7 divide a 42, y $F(1)$ es verdadera.

Etapa 2. Como Hipótesis de Inducción supondremos que $F(n)$ es verdadera. e.e. suponemos que existe k tal que

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} + 7^n = 7 \cdot k \qquad (H)$$

Etapa 3. La Tesis de Inducción es que $F(n+1)$ es verdadera. e.e. debemos mostrar que existe h tal que

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} + 7^{n+1} \quad = \quad 7 \cdot h \Longleftrightarrow 3^{2n+3} + 2^{n+3} + 7^{n+1} = 7 \cdot h$$

En efecto

$$\begin{array}{lll} 3^{2n+3} + 2^{n+3} + 7^{n+1} & : & 3^{2n+1} + 2^{n+2} + 7^n = 9 \\ 3^{2n+3} + 9 \cdot 2^{n+2} + 9 \cdot 7^n & & \\ - - - - - - - - - - - - & & \\ -7 \cdot 2^{n+2} - 2 \cdot 7^n & & \end{array}$$

Así que, por definición tenemos que

$$\begin{aligned} 3^{2n+3} + 2^{n+3} + 7^{n+1} &= 9(3^{2n+1} + 2^{n+2} + 7^n) + (-7 \cdot 2^{n+2} - 2 \cdot 7^n) \\ &\overset{(H)}{=} 9 \cdot 7k - 7(2^{n+2} + 2 \cdot 7^{n-1}) \\ &= 7\underbrace{(9 \cdot k - 2^{n+2} - 2 \cdot 7^{n-1})}_{h} \end{aligned}$$

Luego, $F(n+1)$ es verdadera, y $F(k)$ es verdadera $(\forall k; k \in \mathbb{N})$

(3) Si llamamos c_k al coeficiente del k-ésimo término t_k, para cada k en el desarrollo binomial $(1+x)^n$ y $A = \{c_2, c_3, c_4\}$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{n \in \mathbb{N} \mid A \text{ es una progresión aritmética}\}$$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar los elementos del conjunto $\mathbb{S}$. Es decir

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{S} &\iff n \in \mathbb{N} \ \wedge \ A = \{c_2, c_3, c_4\} \text{ es una progresión aritmética} \\ &\iff n \in \mathbb{N} \ \wedge \ c_3 - c_2 = c_4 - c_3 \quad \text{(De estas relaciones depende la solución del problema)} \end{aligned}$$

Etapa 2. Gestión de la información

- Sabemos que c_{k+1} es el coeficiente del término t_{k+1}. Así que en primer lugar procedemos a determinar los términos involucrados; t_2, t_3 y t_4

$$t_{k+1} \quad = \quad \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \binom{n}{k} x^k \Longrightarrow c_{k+1} = \binom{n}{k} \Longrightarrow \begin{cases} c_2 = \dbinom{n}{1} \\ c_3 = \dbinom{n}{2} \\ c_4 = \dbinom{n}{3} \end{cases}$$

- Sabemos también que $A = \{c_2, c_3, c_4\}$ es una progresión aritmética si y sólo si $c_3 - c_2 = c_4 - c_3$. Así que

$$
\begin{aligned}
c_3 - c_2 = c_4 - c_3 &\iff \binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2} \\
&\iff \frac{n!}{2!\,(n-2)!} - \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{3!\,(n-3)!} - \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \\
&\iff \frac{(n-2)!(n-1)n}{2!\,(n-2)!} - \frac{(n-1)!n}{1!\,(n-1)!} = \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{3!\,(n-3)!} - \frac{(n-2)!(n-1)n}{2!\,(n-2)!} \\
&\iff \frac{(n-1)n}{2} - \frac{n}{1} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6} - \frac{(n-1)n}{2} \\
&\iff \frac{(n-1)n - 2n}{2} = \frac{(n-2)(n-1)n - 3n(n-1)}{6} \\
&\iff \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n(n-1)(n-5))}{6} \\
&\iff 3(n-3) = (n-1)(n-5) \\
&\iff 3n - 9 = n^2 - 6n + 5 \\
&\iff n^2 - 9n + 14 = 0
\end{aligned}
$$

- Finalmente,

$$n^2 - 9n + 14 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (n-2)(n-7) = 0 \Longrightarrow n = 2 \wedge n = 7$$

Etapa 3. Conclusiones y toma de decisiones:

- Si $n = 2$ entonces tenemos que $\binom{2}{1} = 2$, $\binom{2}{2} = 1$ y $\binom{2}{3} =$ No definido, por tanto $2 \notin \mathbb{S}$
- Si $n = 7$ entonces tenemos que $\binom{7}{1} = 7$, $\binom{7}{2} = 21$ y $\binom{7}{3} = 35$ forman una progresión aritmética con diferencia 14.

Luego, $\mathbb{S} = \{7\}$

(4) Sea $\mathbb{U} = \{r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid 3a_0 - 2a_1 = a_3\}$. Define en $\mathbb{R}_2[x]$ la relación

$$p(x)\, \Re\, q(x) \quad \iff \quad (q(x) - p(x)) \in \mathbb{U} \quad (\text{ para cada: } p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \text{ y } q(x) \in \mathbb{R}_2[x])$$

4.1 Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia.

Solución

(a) Debemos mostrar que $\Re$ es una relación reflexiva, y para ello observamos lo siguiente.

Si $r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces

$$r(x) - r(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2) - (a_0 + a_1x + a_2x^2) = \underbrace{0}_{a_0} + \underbrace{0}_{a_1} \cdot x + \underbrace{0}_{a_2} \cdot x^2$$

Además $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$, así que $(r(x) - r(x)) \in \mathbb{U}$ y $r(x) \Re r(x)$, y por ende es una relación reflexiva.

(b) Debemos mostrar que $\Re$ es una relación simétrica, y para ello esta vez procedemos como sigue:

Si $r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $s(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $r(x)\Re\, s(x)$ entonces

$$\begin{aligned}
r(x)\Re\, s(x) &\iff (s(x) - r(x)) \in \mathbb{U}\\
&\iff [(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)x^2] \in \mathbb{U}\\
&\iff 3(b_0 - a_0) - 2(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2)\\
&\Longrightarrow -3(b_0 - a_0) + 2(b_1 - a_1) = -(b_2 - a_2)\\
&\Longrightarrow 3(a_0 - b_0) - 2(a_1 - b_1) = (a_2 - b_2)\\
&\Longrightarrow [(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2] \in \mathbb{U}\\
&\Longrightarrow (r(x) - s(x)) \in \mathbb{U}\\
&\Longrightarrow s(x)\Re\, r(x)
\end{aligned}$$

Y $\Re$ es una relación simétrica.

(c) Debemos mostrar que $\Re$ es una relación transitiva, y para ello seguimos la siguiente rutina:

Si $r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, $s(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $t(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$tal que $r(x)\Re\, s(x) \wedge s(x)\Re\, t(x)$ entonces

$$\begin{aligned}
r(x)\Re\, s(x) &\iff (s(x) - r(x)) \in \mathbb{U}\\
&\iff [(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)x^2] \in \mathbb{U}\\
&\iff 3(b_0 - a_0) - 2(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2)\\
&\iff 3b_0 - 3a_0 - 2b_1 + 2a_1 = b_2 - a_2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
s(x)\Re\, t(x) &\iff (t(x) - s(x)) \in \mathbb{U}\\
&\iff [(c_0 - b_0) + (c_1 - b_1)x + (c_2 - b_2)x^2] \in \mathbb{U}\\
&\iff 3(c_0 - b_0) - 2(c_1 - b_1) = (c_2 - b_2)\\
&\iff 3c_0 - 3b_0 - 2c_1 + 2b_1 = c_2 - b_2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Haciendo $(1) + (2)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
3b_0 - 3a_0 - 2b_1 + 2a_1 + 3c_0 - 3b_0 - 2c_1 + 2b_1 = b_2 - a_2 + c_2 - b_2 &\Longrightarrow -3a_0 + 2a_1 + 3c_0 - 2c_1 = -a_2 + c_2\\
&\Longrightarrow 3(c_0 - a_0) - 2(c_1 - a_1) = c_2 - a_2\\
&\Longrightarrow (t(x) - r(x)) \in \mathbb{U}\\
&\Longrightarrow r(x)\Re\, t(x)
\end{aligned}$$

Y entonces $\Re$ es una relación transitiva, conforme a lo anterior es una relación de equivalencia.

4.2 Demuestre que $\overline{a + ax + ax^2} = \mathbb{U} \quad (\forall a; a \in \mathbb{R})$

Solución

En general, podemos calcular para $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $\overline{p(x)} = \overline{a_0 + a_1x + a_2x^2}$.

$$
\begin{aligned}
q(x) \in \overline{p(x)} &\iff q(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge q(x) \Re\, p(x) \\
&\iff q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge [(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2] \in \mathbb{U} \\
&\iff q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge 3(a_0 - b_0) - 2(a_1 - b_1) = (a_2 - b_2) \\
&\iff q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge 3b_0 - 2b_1 - b_2 = 3a_0 - 2a_1 - a_2 \\
&\iff q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge 3b_0 - 2b_1 - (3a_0 - 2a_1 - a_2) = b_2 \\
&\iff q(x) = b_0 + b_1 x + [3b_0 - 2b_1 - (3a_0 - 2a_1 - a_2)]x^2 \; b_0 \in \mathbb{R} \;\wedge\; b_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Así que,

$$
\overline{a_0 + a_1 x + a_2 x^2} = \{b_0 + b_1 x + [3b_0 - 2b_1 - (3a_0 - 2a_1 - a_2)]x^2 \mid b_0 \in \mathbb{R} \;\wedge\; b_1 \in \mathbb{R}\}
$$

Por tanto, en particular para $\overline{a + ax + ax^2}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\overline{a + ax + ax^2} &= \{b_0 + b_1 x + [3b_0 - 2b_1 - (3a - 2a - a)]x^2 \mid b_0 \in \mathbb{R} \;\wedge\; b_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{b_0 + b_1 x + [3b_0 - 2b_1]x^2 \mid b_0 \in \mathbb{R} \;\wedge\; b_1 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Y por otra parte,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \{r(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid 3a_0 - 2a_1 = a_3\} \\
&= \{r(x) = a_0 + a_1 x + (3a_0 - 2a_1)x^2 \mid \; a_0 \in \mathbb{R} \;\wedge\; a_1 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Luego, $\overline{a + ax + ax^2} = \mathbb{U} \quad (\forall a; a \in \mathbb{R})$