

Álgebra¹ - Solución Pep 1
 Profesor Ricardo Santander Baeza
 21 de Julio del 2008

(1) Demuestre, usando propiedades (no tablas de verdad), que la siguiente proposición lógica es una Tautología.

$$[[\sim p \vee (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)]] \vee \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\} \iff [p \wedge q]$$

Solución

Si llamamos $A = \{[\sim p \vee (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)]\}$ y $B = \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\}$ entonces debemos mostrar que

$$A \vee B \iff p \wedge q$$

Con esto en mente, por una parte, tenemos que,

$$\begin{aligned} A &\iff \{[\sim p \vee (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)]\} \\ &\iff \{[(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r)] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge r)]\} \\ &\iff [(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (p \wedge \sim q)] \vee [(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (p \wedge r)] \\ &\iff [\sim (p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (p \wedge \sim q)] \vee [(\sim p \vee q) \wedge \sim (p \wedge r) \wedge (p \wedge r)] \\ &\iff C \vee C \quad (C \text{ significa contradicción}) \\ &\iff C \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} B &\iff \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\} \\ &\iff (p \wedge q) \vee [(r \wedge \sim r) \vee (r \wedge q)] \wedge p \\ &\iff (p \wedge q) \vee [(r \wedge q) \wedge p] \\ &\iff (p \wedge q) \end{aligned}$$

Así que, como conclusión tenemos que:

$$\begin{aligned} \{[\sim p \vee (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)]\} \vee \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\} &\iff A \vee B \\ &\iff C \vee (p \wedge q) \\ &\iff (p \wedge q) \end{aligned}$$

(2) Usando inducción Matemática, demuestre que la fórmula:

$$F(n) : \quad 2 + \sum_{j=1}^n 3 \cdot (-1)^j \cdot 2^j = (-1)^n \cdot 2^{n+1} \quad \text{es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

¹Cada problema vale 1.5 puntos
 Tiempo 120'

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $F(1)$ es verdadera

Por una parte,

$$2 + \sum_{j=1}^1 3 \cdot (-1)^j \cdot 2^j = 2 - 6 = -4$$

Pot otra parte,

$$(-1)^1 \cdot 2^{1+1} = -4$$

Así que

$$2 + \sum_{j=1}^1 3 \cdot (-1)^j \cdot 2^j = (-1)^1 \cdot 2^{1+1}$$

Y $F(1)$ es verdadera

Etapa 2. Supongamos como hipótesis de inducción que $F(n)$ e verdadera, es decir:

$$2 + \sum_{j=1}^n 3 \cdot (-1)^j \cdot 2^j = (-1)^n \cdot 2^{n+1} \quad (H)$$

Etapa 3. Por demostrar entonces que $F(n+1)$ es verdadera, es decir, por demostrar que

$$2 + \sum_{j=1}^{n+1} 3 \cdot (-1)^j \cdot 2^j = (-1)^{n+1} \cdot 2^{(n+1)+1} = (-1)^{n+1} \cdot 2^{(n+2)}$$

En efecto

$$\begin{aligned} 2 + \sum_{j=1}^{n+1} 3 \cdot (-1)^j \cdot 2^j &= 2 + \sum_{j=1}^n 3 \cdot (-1)^j \cdot 2^j + \sum_{j=n+1}^{n+1} 3 \cdot (-1)^j \cdot 2^j \\ &= 2 + \sum_{j=1}^n 3 \cdot (-1)^j \cdot 2^j + 3 \cdot (-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1} \\ &\stackrel{(H)}{=} (-1)^n \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1} \\ &= ((-1)^n + 3 \cdot (-1)^{n+1}) 2^{n+1} \\ &= ((-1)^n - 3 \cdot (-1)^n) 2^{n+1} \\ &= (-2(-1)^n) 2^{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot 2^{n+2} \end{aligned}$$

Luego, $F(n+1)$ es verdadera y entonces la fórmula $F(n)$ es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

(3) Si $G = \{a, 10, c, \dots\}$ es una progresión geométrica y $A = \{a-1, 8, c-8, \dots\}$ es una progresión aritmética

(a) Determine ambas progresiones

Solución

Etapa 1. Debemos determinar G A

Etapa 2. Gestión de la información

(i) $G = \{a, 10, c, \dots\}$ es una progresión geométrica si y sólo si existe $r \in (\mathbb{R} - \{0, 1\})$ tal que

$$G = \left\{ \frac{10}{r}, 10, 10r, \dots \right\}$$

Y entonces

$$A = \left\{ \frac{10}{r} - 1, 8, 10r - 8, \dots \right\}$$

(ii) $A = \left\{ \frac{10}{r} - 1, 8, 10r - 8, \dots \right\}$ es una progresión aritmética si y sólo si

$$\begin{aligned} 8 - \left(\frac{10}{r} - 1 \right) &= 10r - 8 - 8 \iff 9 - \frac{10}{r} = 10r - 16 \\ &\iff 9r - 10 = 10r^2 - 16r \\ &\iff 10r^2 - 25r + 10 = 0 \\ &\implies \frac{25 \pm \sqrt{625 - 400}}{20} \\ &\implies r = \begin{cases} \frac{25 + \sqrt{225}}{20} = 2 \\ \text{ó} \\ \frac{25 - \sqrt{225}}{20} = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Etapa 3. Conclusión Tenemos dos casos:

(i) Caso 1: $r = 2$ entonces $G = \{5, 10, 20, \dots\}$ y $A = \{4, 8, 12, \dots\}$

(ii) Caso 1: $r = \frac{1}{2}$ entonces $G = \{20, 10, 5, \dots\}$ y $A = \{19, 8, -3, \dots\}$

(b) Calcule la suma de los 50 primeros términos de la progresión aritmética A

Solución

Etapa 1. Debemos calcular S_{50} , suma de los 50 primeros términos de la progresión aritmética A .

Etapa 2. Gestión de la información

En general para una progresión aritmética $S_{50} = \frac{50}{2}(2a_1 + 49d)$. Así que usando el resultado obtenido en el ítem anterior tenemos:

(i) Si $r = 2$ entonces $A = \{4, 8, 12, \dots\}$, es decir $d = 4$ y $a_1 = 4$, por tanto

$$S_{50} = 25(8 + 196) = 5100$$

(ii) Si $r = \frac{1}{2}$ entonces $A = \{19, 8, -3, \dots\}$, es decir $d = -11$ y $a_1 = 19$, por tanto

$$S_{50} = 25(38 - 539) = -12525$$

(4) Determine, si es posible, el término que contiene x^{18} en el desarrollo de la expresión binomial:

$$\left(\frac{1}{x^6} + 1 + x^6\right) \left(2x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^8$$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar el término que contiene a x^{18} .

Etapa 2. Gestión de la información

(a) Sabemos que:

$$\begin{aligned} \left(2x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^8 &= \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (2x^3)^{8-k} \left(-\frac{1}{x^3}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^8 (-1)^k \cdot 2^{8-k} \cdot \binom{8}{k} x^{24-6k} \end{aligned}$$

(b) Luego,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^6} + 1 + x^6\right) \left(2x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^8 &= \left(\frac{1}{x^6} + 1 + x^6\right) \sum_{k=0}^8 (-1)^k \cdot 2^{8-k} \cdot \binom{8}{k} x^{24-6k} \\ &= \sum_{k=0}^8 (-1)^k \cdot 2^{8-k} \cdot \binom{8}{k} x^{18-6k} + \sum_{k=0}^8 (-1)^k \cdot 2^{8-k} \cdot \binom{8}{k} x^{24-6k} + \sum_{k=0}^8 (-1)^k \cdot 2^{8-k} \cdot \binom{8}{k} x^{30-6k} \end{aligned}$$

Debemos imponer por tanto para las sumas 1,2 y 3 respectivamente

$$\begin{cases} 18 - 6k = 18 \Leftrightarrow 6k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \\ 24 - 6k = 18 \Leftrightarrow 6k = 6 \Leftrightarrow k = 1 \\ 30 - 6k = 18 \Leftrightarrow 6k = 12 \Leftrightarrow k = 2 \end{cases}$$

Luego, el término pedido es

$$T = 2^8 \cdot \binom{8}{0} x^{18} - 2^7 \cdot \binom{8}{1} x^{18} + 2^6 \cdot \binom{8}{2} x^{18} = \left(2^8 \cdot \binom{8}{0} - 2^7 \cdot \binom{8}{1} + 2^6 \cdot \binom{8}{2}\right) x^{18}$$