Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 2
Profesor Ricardo Santander Baeza
25 de Agosto del 2008

1. Si $\mathbb{U} = \left\{h_0 + h_1x + h_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid h_0 + h_2 = h_1\right\}$ entonces definimos en $\mathbb{R}_2[x]$ la relación:

$$p(x) \,\Re\, q(x) \iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{U}$$

(a) Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia

Solución

Etapa 1. Para que $\Re$ sea una relación de equivalencia debemos mostrar que es una relación Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

Etapa 2. Gestión de la información:

(i) En primer lugar que $p(x) \,\Re\, q(x)$, significa lo siguiente:

Para $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned} p(x) \,\Re\, q(x) &\iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{U} \\ &\iff ((p_0 + p_1x + p_2x^2) - (q_0 + q_1x + q_2x^2)) \in \mathbb{U} \\ &\iff (p_0 - q_0 + (p_1 - q_1)x + (p_2 - q_2)x^2) \in \mathbb{U} \\ &\iff (p_0 - q_0) + (p_2 - q_2) = (p_1 - q_1) \qquad (*) \end{aligned}$$

(ii) $\Re$ será una relación reflexiva si $p(x)\Re p(x) \quad (\forall p(x); p(x) \in \mathbb{R}_2[x])$.

En efecto, como $0 + 0 = 0$. De $(*)$ sigue que

$$(p_0 - p_0) + (p_2 - p_2) = (p_1 - p_1) \iff p(x)\Re p(x) \qquad (\forall p(x); p(x) \in \mathbb{R}_2[x])$$

Así que $\Re$ es una relación reflexiva.

(iii) $\Re$ será una relación simétrica si $p(x)\Re q(x) \Longrightarrow q(x)\Re p(x)$.

En efecto de $(*)$, sigue que

$$\begin{aligned} p(x) \,\Re\, q(x) &\iff (p_0 - q_0) + (p_2 - q_2) = (p_1 - q_1) \\ &\Longrightarrow -((p_0 - q_0) + (p_2 - q_2)) = -(p_1 - q_1) \\ &\Longrightarrow -(p_0 - q_0) + (-)(p_2 - q_2) = -(p_1 - q_1) \\ &\Longrightarrow (q_0 - p_0) + (q_2 - p_2) = (q_1 - p_1) \\ &\Longrightarrow q(x)\Re p(x) \end{aligned}$$

Luego, $\Re$ es una relación simétrica.

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

(iv) $\Re$ será una relación transitiva si

$$p(x)\Re q(x) \wedge q(x)\Re r(x) \Longrightarrow p(x)\Re r(x)$$

.

En efecto, si $r(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces de $(*)$, sigue que

$$\begin{array}{rcl} p(x)\ \Re\ q(x) & \Longleftrightarrow & (p_0 - q_0) + (p_2 - q_2) = (p_1 - q_1) \\ q(x)\ \Re\ r(x) & \Longleftrightarrow & (q_0 - r_0) + (q_2 - r_2) = (q_1 - r_1) \end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} p(x)\ \Re\ q(x) \wedge q(x)\ \Re\ r(x) & \Longleftrightarrow & \left.\begin{array}{rcl} (p_0 - q_0) + (p_2 - q_2) & = & (p_1 - q_1) \\ (q_0 - r_0) + (q_2 - r_2) & = & (q_1 - r_1) \end{array}\right| \\ & \Longrightarrow & (p_0 - q_0) + (q_0 - r_0) + (p_2 - q_2) + (q_2 - r_2) = (p_1 - q_1) + (q_1 - r_1) \\ & \Longrightarrow & (p_0 - r_0) + (p_2 - r_2) = (p_1 - r_1) \\ & \Longrightarrow & p(x)\Re r(x) \end{array}$$

Luego, $\Re$ es una relación transitiva, y por ende una relación de equivalencia

(b) Determine $\overline{a_0 + a_1x + a_2x^2} = \{b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid (b_0 + b_1x + b_2x^2)\Re(a_0 + a_1x + a_2x^2)\}$

Solución

De $(*)$ sigue que

$$\begin{array}{rcl} b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \overline{a_0 + a_1x + a_2x^2} & \Longleftrightarrow & b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]\ \wedge\ (b_0 + b_1x + b_2x^2)\Re(a_0 + a_1x + a_2x^2) \\ & \Longleftrightarrow & b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]\ \wedge\ (b_0 - a_0) + (b_2 - a_2) = (b_1 - a_1) \\ & \Longleftrightarrow & b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]\ \wedge\ b_0 - b_1 + b_2 = a_0 - a_1 + a_2 \\ & \Longleftrightarrow & b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]\ \wedge\ b_0 = a_0 + (b_1 - a_1) + (a_2 - b_2) \\ & \Longleftrightarrow & (a_0 + (b_1 - a_1) + (a_2 - b_2)) + b_1x + b_2x^2 : (b_1 \in \mathbb{R} \wedge b_2 \in \mathbb{R}) \end{array}$$

Así que,

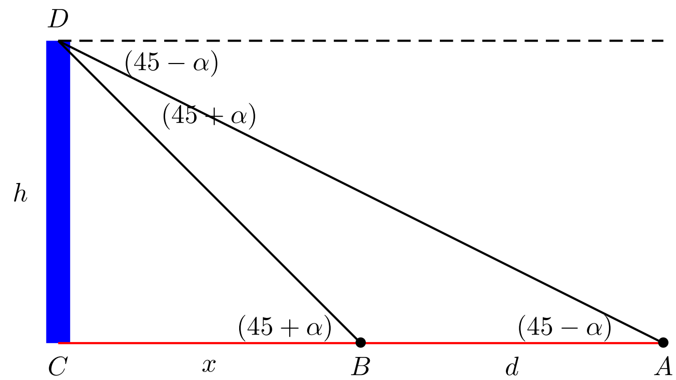
$$\overline{a_0 + a_1x + a_2x^2} \quad = \quad \{(a_0 + (b_1 - a_1) + (a_2 - b_2)) + b_1x + b_2x^2 \mid b_1 \in \mathbb{R} \wedge b_2 \in \mathbb{R}\} \qquad (**)$$

2. Desde la cúspide de una torre de altura h metros una persona observa, con ángulos de depresión de $(45 - \alpha)$ y $(45 + \alpha)$, a dos objetos que están en el plano, y en la línea que pasa por el pie de dicha torre. Si llamamos d a la distancia entre los objetos observados entonces demuestre que

$$d \quad = \quad 2h\tan(2\alpha)$$

Solución

Etapa 1. Planteamiento del problema, (opcional), pero muy útil



Etapa 2. Gestión de la información

(a) En triángulo rectángulo BCD tenemos que

$$\tan(45+\alpha)=\frac{h}{x}\Longleftrightarrow x=\frac{h}{\tan(45+\alpha)} \tag{1}$$

(b) En triángulo rectángulo ACD tenemos que

$$\tan(45-\alpha)=\frac{h}{x+d}\Longleftrightarrow h=x\tan(45-\alpha)+d\tan(45-\alpha) \tag{2}$$

(c) Sustituyendo el valor de x de (1) en (2) tenemos que

$$\begin{aligned}
h=\frac{h}{\tan(45+\alpha)}\tan(45-\alpha)+d\tan(45-\alpha) &\Longleftrightarrow d\tan(45-\alpha)=h-\frac{h}{\tan(45+\alpha)}\tan(45-\alpha)\\
&\Longleftrightarrow d\tan(45-\alpha)=h\left[1-\frac{\tan(45-\alpha)}{\tan(45+\alpha)}\right]\\
&\Longleftrightarrow d\tan(45-\alpha)=h\left[\frac{\tan(45+\alpha)-\tan(45-\alpha)}{\tan(45+\alpha)}\right]\\
&\Longleftrightarrow d=h\left[\frac{\tan(45+\alpha)-\tan(45-\alpha)}{\tan(45+\alpha)\tan(45-\alpha)}\right]\\
&\Longleftrightarrow d=h\left[\frac{\left(\frac{\tan 45+\tan\alpha}{1-\tan 45\tan\alpha}\right)-\left(\frac{\tan 45-\tan\alpha}{1+\tan 45\tan\alpha}\right)}{\left(\frac{\tan 45+\tan\alpha}{1-\tan 45\tan\alpha}\right)\left(\frac{\tan 45-\tan\alpha}{1+\tan 45\tan\alpha}\right)}\right]\\
&\Longleftrightarrow d=h\left[\frac{\left(\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\right)-\left(\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\right)}{\left(\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\right)\left(\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\right)}\right]\\
&\Longleftrightarrow d=h\left[\frac{(1+\tan(\alpha))^2+(1-\tan(\alpha))^2}{1-tan^2\alpha}\right]\\
&\Longleftrightarrow d=h\left[\frac{4\tan(\alpha)}{1-tan^2\alpha}\right]\\
&\Longleftrightarrow d=2h\left[\frac{2\tan(\alpha)}{1-tan^2\alpha}\right]\\
&\Longleftrightarrow d=2h\tan(2\alpha)
\end{aligned}$$

3. Si definimos la función $T:\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)\longmapsto\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$, tal que $T\begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+\lambda y-z\\ 2\lambda x+\lambda z\\ x-\lambda y+(1+\lambda)z\end{pmatrix}$ entonces

(a) Demuestre que T es un homomorfismo para cada $\lambda\in\mathbb{R}$

Solución

Etapa 1. Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3)$ debemos mostrar que $T(A+B) = T(A) + T(B)$
Etapa 2. Gestión de la información

$$
\begin{array}{lcl}
A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3) & \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \\
B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3) & \Longleftrightarrow & B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
T(A+B) &= T\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= T\begin{pmatrix} (x_1+x_2) & (y_1+y_2) & (z_1+z_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1+x_2) + \lambda(y_1+y_2) - (z_1+z_2) \\ 2\lambda(x_1+x_2) + \lambda(z_1+z_2) \\ (x_1+x_2) - \lambda(y_1+y_2) + (1+\lambda)(z_1+z_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \lambda y_1 + \lambda y_2 - z_1 - z_2 \\ 2\lambda x_1 + 2\lambda x_2 + \lambda z_1 + \lambda z_2 \\ x_1 + x_2 - \lambda y_1 - \lambda y_2 + (1+\lambda)z_1 + (1+\lambda)z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 - z_1 + x_2 + \lambda y_2 - z_2 \\ 2\lambda x_1 + \lambda z_1 + 2\lambda x_2 + \lambda z_2 \\ x_1 - \lambda y_1 + (1+\lambda)z_1 + x_2 - \lambda y_2 + (1+\lambda)z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1 + \lambda y_1 - z_1) + (x_2 + \lambda y_2 - z_2) \\ (2\lambda x_1 + \lambda z_1) + (2\lambda x_2 + \lambda z_2) \\ (x_1 - \lambda y_1 + (1+\lambda)z_1) + (x_2 - \lambda y_2 + (1+\lambda)z_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 - z_1 \\ 2\lambda x_1 + \lambda z_1 \\ x_1 - \lambda y_1 + (1+\lambda)z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + \lambda y_2 - z_2 \\ 2\lambda x_2 + \lambda z_2 \\ x_2 - \lambda y_2 + (1+\lambda)z_2 \end{pmatrix} \\
&= T\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \\
&= T(A) + T(B)
\end{aligned}
$$

(b) Determine el conjunto $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ No es inyectiva}\}$

Solución

Etapa 1. $\lambda \in \mathbb{S} \Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ T$ No es inyectiva

Etapa 2. Gestión de la información

Si T no debe ser inyectiva entonces debemos estudiar el núcleo o kernel de T.

$$\begin{aligned}
A \in \ker(T) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3) \wedge T(A) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)}\\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \wedge T\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x+\lambda y - z\\ 2\lambda x + \lambda z\\ x - \lambda y + (1+\lambda)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{lcl} x+\lambda y - z &=& 0\\ 2\lambda x + \lambda z &=& 0\\ x - \lambda y + (1+\lambda)z &=& 0 \end{array}\right|\\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{lcl} x+\lambda y - z &=& 0\\ \lambda(2x + z) &=& 0\\ x - \lambda y + (1+\lambda)z &=& 0 \end{array}\right| \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}
\end{aligned}$$

(a) Como en la ecuación (2) $\lambda(2x+z) = 0$ entonces sigue que $\lambda = 0 \vee (2x+z) = 0$.

Caso 1. Si $\lambda = 0$ entonces sustituyendo en las ecuaciones (1) y (3) sigue que

$$\left.\begin{array}{lcl} x - z &=& 0\\ x + z &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow x = z = 0 \wedge y \in \mathbb{R}$$

En este caso, $(\forall y; y \in \mathbb{R})$, T no es inyectiva, pues:

$$T\begin{pmatrix} 0 & y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 0\cdot y - 0\\ 2\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 0\\ 0 - 0\cdot y + (1+0)0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \end{pmatrix} \in \ker(T)$$

Caso 2. Si $\lambda \neq 0$ entonces $(2x+z) = 0$, es decir $z = -2x$ sustituyendo en las ecuaciones (1) y (3) sigue que

$$\left.\begin{array}{lcl} 3x + \lambda y &=& 0\\ x - \lambda y + (1+\lambda)(-2x) &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} 3x + \lambda y &=& 0\\ x - \lambda y - 2x - 2\lambda x &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow x(1-\lambda) = 0$$

Caso 2.1 $\lambda = 1$ entonces

$$\left.\begin{array}{lcl} 3x + y &=& 0\\ -3x - y &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow y = -3x \wedge z = -2x$$

En este caso, $(\forall x; x \in \mathbb{R})$, T no es inyectiva, pues:

$$T\begin{pmatrix} x & -2x & -3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2x + 3x\\ 2x - 2x\\ x + 3x - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & -3x & -2x \end{pmatrix} \in \ker(T)$$

Caso 2.2 $\lambda \neq 1$ entonces $x = 0$ y como $z = -2x$ entonces $z = 0$, luego sustituyendo en las ecuaciones obtenemos que $\lambda y = 0$ y como $\lambda \neq 0$ entonces $y = 0$ y T es inyectiva

(b) Finalmente,

$$\mathbb{S} \;=\; \{0, 1\}$$

4. Sea $f : (\mathbb{R}^3, +) \longmapsto (\mathbb{R}^3, +)$ un homomorfismo de grupos no nulo. Demuestre que

(a) $\ker(f \circ f) = \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Solución

Etapa 1. Sabemos que $\ker(f) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$. Así que mostrar que $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ significa que "existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$, y $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$"

Etapa 2. Gestión de la información

- Como f es un homomorfismo no nulo entonces existe $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ tal que $f(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, (pues sabemos que la condición de homomorfismo, obliga a que, $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$), digamos entonces que $f(u) = v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

- $\ker(f \circ f) = \mathbb{R}^3$, significa que $(f \circ f)(z) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad (\forall z; z \in \mathbb{R}^3)$. Así que en particular

$$(f \circ f)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow f(f(u)) = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow v \in \ker(f)$$

Y como $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ entonces $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

(b) $\text{Img }(f \circ f) = \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \text{Img }(f) = \mathbb{R}^3$

Solución

Etapa 1. Para mostrar que $\text{Img }(f) = \mathbb{R}^3$ debemos verificar que $\text{Img }(f) \subset \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^3 \subset \text{Img }(f)$

Etapa 2. Gestión de la información

- Como $f : (\mathbb{R}^3, +) \longmapsto (\mathbb{R}^3, +)$ un homomorfismo de grupos entonces en particular, es una función, y por tanto

$$\text{Img }(f) \subset \mathbb{R}^3 \tag{3}$$

- Así que sólo resta mostrar que $\mathbb{R}^3 \subset \text{Img }(f)$.

- Pero como $\text{Img }(f \circ f) = \mathbb{R}^3$ entonces $\forall z; z \in \mathbb{R}^3$ existe $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $(f \circ f)(x) = z$ entonces

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{R}^3 &\Longrightarrow (\exists v; v \in \mathbb{R}^3) : (f \circ f)(v) = u \\ &\Longrightarrow (\exists v; v \in \mathbb{R}^3) : f(f(v)) = u \\ &\Longrightarrow u \in \text{ Img }(f) \end{aligned}$$

Así que,

$$\mathbb{R}^3 \subset \text{Img }(f) \tag{4}$$

Luego de (3) y de (4), sigue que $\text{Img }(f) = \mathbb{R}^3$