Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 2
Profesor Ricardo Santander Baeza
06 de Julio del 2009

(1) Considerando la siguiente información:

- El conjunto $\mathbb{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid b = c \right\}$
- La función $f : \mathbb{S} \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = b + dx + ax^2$
- La función $g : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $g(m,n) = m + (m+n)x - nx^2$

entonces

(a) Demuestre que f es un isomorfismo de grupos

Solución

En primer lugar debemos observar que

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid b = c \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge d \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

y por ende, $(\mathbb{S}, +)$ es un grupo abeliano, así que tiene sentido preguntar si f es o no un isomorfismo de grupos.

En segundo lugar, mostramos que f es un homomorfismo. Si $A \in \mathbb{S}$ y $B \in \mathbb{S}$ entonces debemos mostrar que $f(A+B) = f(A) + f(B)$.

Ahora si,

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{S} &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \\ B \in \mathbb{S} &\iff A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(A+B) &= f \begin{pmatrix} (a+p) & (b+q) \\ (b+q) & (d+r) \end{pmatrix} \\ &= (b+q) + (d+r)x + (a+p)x^2 \\ &= (b + dx + ax^2) + (q + rx + px^2) \\ &= f \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \\ &= f(A) + f(B) \end{aligned}$$

En tercer lugar, mostramos que f es un homomorfismo inyectivo, a través de un estudio de su *kernel*.

[1]Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 120'

$$\begin{aligned}
A \in \ker(f) &\iff A \in \mathbb{S} \wedge f(A) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{S} \wedge f\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{S} \wedge b + dx + ax^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{S} \wedge b = d = a = 0 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y f es inyectiva.

En cuarto y último lugar mostramos que f es sobreyectiva.

Para ello, dado que f es una función, es decir Img $(f) \subset \mathbb{R}_2[x]$, basta resolver la ecuación $f(X) = p(x)$ para el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ dado. Lo que significa que $\mathbb{R}_2[x] \subset$ Img (f) entonces

$$\begin{aligned}
f(X) = p(x) &\iff f\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix} = a_0 + a_1x + a_2x^2 \\
&\iff u_2 + u_3x + u_1x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 \\
&\iff u_2 = a_0 \wedge u_3 = a_1 \wedge u_1 = a_2
\end{aligned}$$

Luego,

$$f\begin{pmatrix} a_2 & a_0 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} = a_0 + a_1x + a_2x^2 \tag{1}$$

Luego, $\mathbb{R}_2[x] \subset$ Img (f) y f es sobreyectiva y por ende un isomorfismo.

(b) Determine f^{-1}

Solución

De (1), sigue que

$$f^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(c) Calcule $(f^{-1} \circ g)(3, 2)$

Solución

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g)(3, 2) &= f^{-1}(g(3, 2)) \\
&= f^{-1}(3 + 5x - 2x^2) \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2) Si λ y μ son números reales y $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ es una función definida por $h(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-x \\ y-\lambda x \\ z-x+\mu \end{pmatrix}$. Determine los conjuntos:

(a) $\mathbb{H} = \{\mu \in \mathbb{R} \mid h \text{ es un homomorfismo de grupos}\}$

Solución

$$\begin{aligned} \mu \in \mathbb{H} &\iff \mu \in \mathbb{R} \wedge h \text{ es un homomorfismo} \\ &\Longrightarrow \mu \in \mathbb{R} \wedge h(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \mu \in \mathbb{R} \wedge \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-\lambda 0 \\ 0-0+\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \mu \in \mathbb{R} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \mu \in \mathbb{R} \wedge \mu = 0 \end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{H} \subset \{0\}$

Recíprocamente, $\mu = 0 \Longrightarrow h(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-x \\ y-\lambda x \\ z-x \end{pmatrix}$. Así que para $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tenemos que

$$\begin{aligned} h(v_1 + v_2) &= h(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= \begin{pmatrix} (y_1+y_2) - (x_1+x_2) \\ (y_1+y_2) - \lambda(x_1+x_2) \\ (z_1+z_2) - (x_1+x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 - x_1 + y_2 - x_2 \\ y_1 - \lambda x_1 + y_2 - \lambda x_2 \\ z_1 - x_1 + z_2 - x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_1 - \lambda x_1 \\ z_1 - x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 - x_2 \\ y_2 - \lambda x_2) \\ z_2 - x_2 \end{pmatrix} \\ &= h(v_1) + h(v_2) \end{aligned}$$

Así que,

$$\mu = 0 \implies h \text{ es un homomorfismo de grupos}(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R}) \Longrightarrow \{0\} \subset \mathbb{H}$$

De donde sigue que,

$$\mathbb{H} = \{0\}$$

(b) $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ es un homomorfismo inyectivo}\}$

Solución

- Sabemos del punto anterior que h es un homomorfismo de grupos si y sólo si $\mu = 0$, y
- En particular h es un homomorfismo de grupos $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$

Así que,

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathbb{S} &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ h \text{ es un homomorfismo inyectivo}\\ &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \ker(h) = \{(0,0,0)\}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}v \in \ker(h) &\iff v \in \mathbb{R}^3 \wedge h(v) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)}\\
&\iff v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge h(x,y,z) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge \begin{pmatrix}y-x\\y-\lambda x\\z-x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge \left.\begin{array}{rcl}y-x &=& 0\\ y-\lambda x &=& 0\\ z-x &=& 0\end{array}\right|\\
&\iff v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge [y = x \ \wedge y = \lambda x \ \wedge z = x]\\
&\iff v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = \lambda x\\
&\iff v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x - \lambda x = 0\\
&\Longrightarrow v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x(1-\lambda) = 0\\
&\Longrightarrow v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = 0 \vee (1-\lambda) = 0 \qquad (2)\end{aligned}$$

Ahora de (2) sigue

$$\lambda \neq 1 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow \ker(h) \subset \{(0,0,0)\}$$

Y como $\{(0,0,0,)\} \subset \ker(h)$ entonces $\lambda \neq 1 \Longrightarrow \ker(h) = (0,0,0,)$

Finalmente,

$$\mathbb{S} \ = \ \mathbb{R} - \{1\}$$

(3) Si las funciones $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ son homomorfismos de grupo. Demuestre que

(a) $(g \circ f)$ inyectiva $\Longrightarrow f$ inyectiva

Solución

Como f es función entonces podemos usar una variante de la definición de inyectividad, en el siguiente sentido.

Para $u_1 \in \mathbb{R}^3$ y $u_2 \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}f(u_1) = f(u_2) &\Longrightarrow g(f(u_1)) = g(f(u_2))\\ &\Longrightarrow (g\circ f)(u_1) = (g \circ f)(u_2)\\ &\Longrightarrow u_1 = u_2 \qquad (\text{ pues, } (g\circ f) \text{ es inyectiva})\end{aligned}$$

Así f es una función inyectiva.

Solución Alternativa

Usando el hecho que f y g son homomorfismo, probamos que f es inyectiva mostrando que $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$. En este caso procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
u \in \ker(f) &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge f(x,y,z) = (0,0,0)\\
&\implies u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge g(f(x,y,z)) = g(0,0,0)\\
&\implies u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge (g \circ f)(x,y,z)) = (0,0,0) \quad (g \text{ es un homomorfismo})\\
&\implies u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge u \in \ker(g \circ f)\\
&\implies u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge u = (0,0,0) \quad (\text{ pues, } (g \circ f) \text{ es inyectiva})
\end{aligned}$$

Luego, $\ker(f) \subset \{(0,0,0)\}$ y como f es homomorfismo de grupos $\{(0,0,0) \subset \ker(f)\}$ entonces $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$. Así que f es inyectiva

(b) $(g \circ f)$ sobreyectiva $\implies g$ sobreyectiva

Solución

Como g es función entonces Img $(g) \subset \mathbb{R}^3$. Así que será suficiente mostrar que $\mathbb{R}^3 \subset$ Img (g), para que esta sea sobreyectiva. Para ver esto debemos construir $x \in \mathbb{R}^3$ tal que para $u \in \mathbb{R}^3$ dado, se verifique $g(x) = u$ entonces

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \text{ sobreyectiva} &\implies (\exists v; v \in \mathbb{R}^3): \ (g \circ f)(v) = u\\
&\implies (\exists v; v \in \mathbb{R}^3): \ g(f(v)) = u\\
&\implies (\exists x = f(v); x \in \mathbb{R}^3): \ g(x) = u
\end{aligned}$$

Luego, g es sobreyectiva.