Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 3
Profesor Ricardo Santander Baeza
17 de Noviembre del 2008

(1) Si $z = 1 + \omega^n + \omega^{2n}$ tal que $n \in \mathbb{N}$, y $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3} \in \mathbb{C}$ entonces demuestre que:

(a) n divisible por $3 \Longrightarrow z = 3$

Solución

n divisible por $3 \Longrightarrow n = 3k \quad (k \in \mathbb{N})$

Así que

$$\begin{aligned}
z &= 1 + \omega^{3k} + \omega^{6k} \\
&= 1 + (\omega^3)^k + (\omega^3)^{2k} \\
&= 1 + \left(\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^3\right)^k + \left(\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^3\right)^{2k} \\
&= 1 + (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)^k + (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)^{2k} \\
&= 1 + 1^k + 1^{2k} \\
&= 3
\end{aligned}$$

(b) n no divisible por $3 \Longrightarrow z = 0$

Solución

n no divisible por $3 \Longrightarrow n = 3k + 1 \quad \vee \quad n = 3k + 2 \quad (k \in \mathbb{N})$

Caso 1. Si $n = 3k + 1$ entonces

$$\begin{aligned}
z &= 1 + \omega^{3k+1} + \omega^{6k+2} \\
&= 1 + (\omega^3)^k\omega + (\omega^3)^{2k}\omega^2 \\
&= 1 + \omega + \omega^2 \qquad (\text{ Ya que } \omega^3 = 1) \\
&= \frac{\omega^3 - 1}{\omega - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Caso 2. Si $n = 3k + 2$ entonces

$$\begin{aligned}
z &= 1 + \omega^{3k+2} + \omega^{6k+4} \\
&= 1 + (\omega^3)^k\omega^2 + (\omega^3)^{2k}\omega^3\omega \\
&= 1 + \omega + \omega^2 \qquad (\text{ Ya que } \omega^3 = 1) \\
&= \frac{\omega^3 - 1}{\omega - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

(2) Si $A = \begin{pmatrix} z & z^2 & z^3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^3 & z^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(3)$ entonces

(a) Calcule usando propiedades el $\det(A^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$

Solución

Debemos calcular $\det(A^n)$, pero como $\det(A^n) = \det(A) \cdot \det(A) \cdots \det(A)$ (n veces) entonces basta calcular $\det(A)$.

Así que

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} z & z^2 & z^3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^3 & z^2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 0 & (z^2 - z) & (z^3 - z) \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & (z^3 - 1) & (z^2 - 1) \end{pmatrix} \\
&= -\det \begin{pmatrix} (z^2 - z) & (z^3 - z) \\ (z^3 - 1) & (z^2 - 1) \end{pmatrix} \\
&= -\left[(z^2 - z)(z^2 - 1) - (z^3 - z)(z^3 - 1)\right] \\
&= z^2(z-1)^2(z+1)^2
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\det(A^n) = (z^2(z-1)^2(z+1)^2)^n = z^{2n}(z-1)^{2n}(z+1)^{2n}$$

(b) Determine el conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(3))\}$

Solución

Para determinar los elementos de S debemos "entrar en el conjunto S", es decir,

$$\begin{aligned}
z \in S &\iff z \in \mathbb{C} \wedge A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(3)) \\
&\iff z \in \mathbb{C} \wedge \det(A) = 0 \\
&\iff z \in \mathbb{C} \wedge z^2(z-1)^2(z+1)^2 = 0 \\
&\iff z \in \mathbb{C} \wedge z = 0 \vee z = 1 \vee z = -1
\end{aligned}$$

Así que

$$S = \{-1, 0, 1\}$$

(3) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\
ax_1 & + & bx_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \\
(a-1)x_1 & + & (b-1)x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3
\end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los conjuntos

(a) $S_1 = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (*) \text{ tiene solución } \}$
(b) $S_2 = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (*) \text{ no tiene solución } \}$

Solución

Para determinar los conjuntos S_1 y S_2 debemos aplicar el teorema del rango al sistema dado, ya que los elementos de estos conjuntos deben aportar información respecto a la existencia de soluciones de dicho sistema.

En este contexto, procedemos en primer lugar a determinar la matriz escala reducida por filas correspondiente a la matriz ampliada A_a, asociada al sistema dado, para determinar el rango de A_a, $\rho(A_a)$. En consecuencia

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ a & b & 2 & 1 & 4 \\ (a-1) & (b-1) & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)
\begin{array}{c} (l_2 \longrightarrow l_2 - 2l_1) \\ (l_3 \longrightarrow l_3 - al_1) \\ (l_3 \longrightarrow l_3 - (a-1)l_1) \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & b-a & 2-a & 1+a & 4-a \\ 0 & b-a & 2-a & 1+a & 4-a \end{array}\right)
$$

$$
(l_4 \longrightarrow l_4 - l_3)
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & b-a & 2-a & 1+a & 4-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c} (l_1 \longrightarrow l_1 - l_2) \\ (l_3 \longrightarrow l_3 - (b-a)l_2) \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2a+b & 1+5a-4b & 4-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (*)
$$

En esta etapa debemos analizar el estado de nuestro problema:

Caso 1. Si en $(*)$ $2 - 2a + b = 0$ es decir, $b = 2a - 2$ entonces $(*)$ se transforma en:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9-3a & 6-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) (**)
$$

Si en $(**)$, $9 - 3a = 0$, es decir $a = 3$ entonces

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \rho(A) = 2 = \rho(A_a) \text{ Y el sistema tiene solución}
$$

Si en $(**)$, $9 - 3a \neq 0$ entonces podemos seguir el proceso de "escalonamiento", es decir

$$
(l_3 \longrightarrow \tfrac{1}{9-3a} l_3)
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\begin{array}{c} (l_1 \longrightarrow l_1 + 5l_3) \\ (l_2 \longrightarrow l_2 - 4l_3) \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Así que $\rho(A) = \rho(A_a) = 3$ y entonces el sistema tiene solución.

Caso 2. Si en $(*)$ $2 - 2a + b \neq 0$ entonces podemos seguir "escalonando" $(*)$ y este se transforma en:

$$
(l_3 \longrightarrow \tfrac{1}{2-2a+b} l_3)
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-3a-4b}{2-2a+b} & \frac{4-b}{2-2a+b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\begin{array}{c} (l_1 \longrightarrow l_1 - 2l_3) \\ (l_2 \longrightarrow l_2 + l_3) \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{16a+3b-12}{b-2a+2} & \frac{2b-8}{2-2a+b} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9-11a+6b}{2-2a+b} & \frac{6-2a}{2-2a+b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-3a-4b}{2-2a+b} & \frac{4-b}{2-2a+b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Luego, en este caso, $\rho(A) = \rho(A_a) = 3$ y entonces $S_1 = \mathbb{R}^2$ y $S_2 = \emptyset$

(4) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$. Si $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ entonces

(a) Demuestre que $Adj(A) \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$, (Donde $Adj(A)$ representa la matriz adjunta de la matriz A)

Solución

Etapa 1. Debemos verificar que $Adj(A) \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$

Etapa 2. Gestión de la información

- Sabemos que $A = (a_{ij}) \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$
- Además, $A \cdot Adj(A) = \det(A) \cdot I_n$, donde I_n es la matriz identidad de orden n. Así que

$$\frac{1}{\det(A)} \cdot A \cdot Adj(A) = I_n \Longrightarrow (Adj(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A \Longrightarrow Adj(A) \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$$

(b) Demuestre que $\det(Adj(A)) = \det(A^{n-1})$
Solución

(i) Sabemos que

$$A \cdot Adj(A) = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix}$$

(ii) Luego,

$$\det(A \cdot Adj(A)) = \det \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix}$$

(iii) Así que,

$$\det(A) \cdot \det(Adj(A)) = (\det(A))^n \Longrightarrow \det(Adj(A)) = (\det(A))^{n-1}$$