Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 3
Profesor Ricardo Santander Baeza
19 de Octubre del 2009

(1) Si $\omega = \cos \dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}$ entonces

(a) Demuestre que $(a = b) \vee (a = c) \vee (b = c) \vee (a = b = c) \Longrightarrow (a + b\,\omega + c\,\omega^2)^3 = \overline{(a + b\,\omega + c\,\omega^2)^3}$

Solución

Etapa 1. Debemos verificar que

$$(a = b) \vee (a = c) \vee (b = c) \vee (a = b = c) \Longrightarrow (a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 = \overline{(a + b\,\omega + c\,\omega^2)^3}$$

Etapa 2. Gestión de la información

(i) Como $\omega = \cos \dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}$ entonces $\omega^3 = 1$ y $\omega \neq 1$

(ii) En particular del punto anterior sigue que $1 + \omega + \omega^2 = 0$, pues

$$0 = \omega^3 - 1 = (\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2)$$

(iii) Conforme al método de reducción obtenido encima, $\omega^2 = -1 - \omega$ tenemos que

$$a + b\,\alpha + c\,\alpha^2 = a + b\,\alpha + c(-1 - \alpha) = (a - c) + (b - c)\alpha$$

(iv) Luego, si aplicamos esos resultados obtenemos los casos:
Caso 1. Si $a = b$ entonces

$$\begin{aligned} (a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 &= ((a - c) + (b - c)\alpha)^3 \\ &= ((a - c)(1 + \alpha))^3 \\ &= ((a - c)^3(-\alpha^2)^3 \qquad (\text{ Reducción}) \\ &= (c - a)^3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Caso 2. Si $a = c$ entonces

$$(a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 = ((a - c) + (b - c)\alpha)^3 = (b - c)\alpha)^3 = (b - c)^3 \in \mathbb{R}$$

Caso 3. Si $b = c$ entonces

$$(a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 = ((a - c) + (b - c)\alpha)^3 = (a - c)^3 \in \mathbb{R}$$

Caso 4. Si $a = b = c$ entonces

$$(a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 = ((a - c) + (b - c)\alpha)^3 = 0 \in \mathbb{R}$$

Luego, entodos los casos $(a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 \in \mathbb{R}$ y entonces

$$(a + b\,\omega + c\,\omega^2)^3 = \overline{(a + b\,\omega + c\,\omega^2)^3}$$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

(b) Demuestre que $(2+2\omega+5\omega^2)^6 = 729$

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que $(2+2\omega+5\omega^2)^6 = 729$

Etapa 2. Gestión de la información

Aplicando "reducción" tenemos que

$$(2+2\omega+5\omega^2)^6 = (2+2\omega+5(-1-\omega))^6 = (-3-3\omega)^6 = (-3)^6(1+\omega)^6 = 729(-\omega^2)^6 = 729(\omega^3)^4 = 729$$

Alternativa

$$(2+2\omega+5\omega^2)^6 = ((1+\omega+\omega^2)+(1+\omega+\omega^2)+3\omega^2)^6 = 3^6(\omega^3)^4 = 3^6 = 729$$

(2) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$(1)\qquad \begin{array}{rcccccccl|} -x_1 & + & (1+\lambda)x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & + & \lambda x_4 & = & 3 \\ \lambda x_1 & - & x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & + & \lambda x_4 & = & 2 \\ \lambda x_1 & + & \lambda x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & + & \lambda x_4 & = & 2 \\ \lambda x_1 & + & \lambda x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ \hline \end{array}$$

Determine el siguiente conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (\textbf{??}) \text{ no tiene solución}\}$$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar el conjunto $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (\textbf{??}) \text{ no tiene solución}\}$

Etapa 2. Gestión de la información

(a) El sistema lo escribimos en su notación matricial

$$\begin{pmatrix} -1 & 1+\lambda & 2-\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & 2-\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2-\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2-\lambda & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Estudiamos la matriz ampliada asociada al sistema

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1+\lambda & 2-\lambda & \lambda & 3 \\ \lambda & -1 & 2-\lambda & \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda & 2-\lambda & \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda & 2-\lambda & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{rl} -L_1 & \to L_1 \\ L_2-L_1 & \to L_2 \\ L_3-L_2 & \to L_3 \\ L_4-L_3 & \to L_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -(1+\lambda) & \lambda-2 & -\lambda & -3 \\ \lambda+1 & -(\lambda+2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+1) & 0 \end{array}\right)$$

En esta última matriz tenemos dos casos para considerar, uno cuando $\lambda = -1$ y l otro cuando $\lambda = -2$.

Al hacer que $\lambda = 1$, nos queda la matriz

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ El que siempre tiene solución.}$$

Ahora si $\lambda = 2$, entonces la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -4 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ Con el cual, también siempre hay solución.

(c) Si operamos más la matriz anterior obtenemos

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -(1+\lambda) & \lambda-2 & -\lambda & -3 \\ \lambda+1 & -(\lambda+2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+1) & 0 \end{array}\right) \quad L_1+L_3 \quad \to L_1 \quad \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & \lambda-2 & -\lambda & -3 \\ \lambda+1 & -(\lambda+2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+1) & 0 \end{array}\right)$$

Si trabajamos más la matriz anterior

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -(1+\lambda) & \lambda-2 & -\lambda & -3 \\ \lambda+1 & -(\lambda+2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+1) & 0 \end{array}\right) \quad L_1+L_3 \quad \to L_1 \quad \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & \lambda-2 & -\lambda & -3 \\ \lambda+1 & -(\lambda+2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+1) & 0 \end{array}\right)$$

(d) En esta última matriz consideremos que $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

La que es equivalente con:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Y que finalmente nos deja:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Que finalmente lo reduce a un sistema inconsistente.

(3) Si definimos $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 + 2a_1 - a_2 = 0\}$ entonces

(a) Muestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_3[x]$ y determine una base para $\mathbb{W}$

Etapa 1. Debemos verificar que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_3[x]$

Etapa 2. Gestión de la información

(i) En primer lugar, $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid 0 + 2\cdot 0 - 0 = 0$. Así que $\mathbb{W} \neq \emptyset$

(ii) En Segundo lugar, buscamos un sistema de generadores para $\mathbb{W}$.

$$\begin{aligned} p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \ \wedge \ a_0 + 2a_1 - a_2 = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \ \wedge \ a_2 = a_0 + 2a_1 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + (a_0 + 2a_1)x^2 + a_3x^3;\ a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_3 \in \mathbb{R} \\ &\iff p(x) = a_0(1 + x^2) + a_1(x + 2x^2) + a_3x^3;\ a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_3 \in \mathbb{R} \\ &\iff p(x) \in \left\langle \{1 + x^2, x + 2x^2, x^3\} \right\rangle \end{aligned}$$

Así que,

$$\mathbb{W} = \left\langle \{1+x^2, x+2x^2, x^3\} \right\rangle$$

e.e. $\alpha = \{1+x^2, x+2x^2, x^3\}$ es un sistema de generadores para $\mathbb{W}$ y $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_3[x]$

(iii) Para que α sea una base basta que sea linealmente independiente, y para ello procedemos como sigue

$$\begin{aligned} a_0(1+x^2) + a_1(x+2x^2) + a_3x^3 = 0_{\mathbb{R}_3[x]} &\Longrightarrow a_0 + a_1x + (a_0+2a_1)x^2 + a_3x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\ &\Longrightarrow a_0 = a_1 = 0 \wedge (a_0 + 2a_1) = 0 \wedge a_3 = 0 \\ &\Longrightarrow a_0 = a_1 = a_3 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, α es linealmente independiente y es una base para $\mathbb{W}$

(b) Demuestre que

$$\mathbb{W} + \mathbb{W} = \{p(x) + q(x) \mid p(x) \in \mathbb{W} \wedge q(x) \in \mathbb{W}\} \subset \mathbb{W}$$

Solución

Etapa 1. Debemos verificar que $\mathbb{W} + \mathbb{W} \subset \mathbb{W}$
Etapa 2. gestión de la información

Debemos recordar que si $\mathbb{W}$ es un subespacio entonces, verifica en particular, que $p(x) \in \mathbb{W}$ y $q(x) \in \mathbb{W}$ entonces $(p(x) + q(x)) \in \mathbb{W}$
Así que

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} + \mathbb{W} &\Longleftrightarrow (\exists p(x); p(x) \in \mathbb{W}) \wedge (\exists q(x); q(x) \in \mathbb{W}) \text{ tal que } u = p(x) + q(x) \\ &\Longrightarrow u = p(x) + q(x) \in \mathbb{W} \quad (\text{ pues } \mathbb{W} \leq \mathbb{R}_3[x]) \end{aligned}$$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y $\alpha = \{p_1, p_2, p_3\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si definimos $\beta = \{q_1, q_2, q_3\} \subset \mathbb{V}$ tal que

$$q_1 = p_1 + p_2 \quad \wedge \quad q_2 = p_1 - p_2 - 3p_3 \quad \wedge \quad q_3 = -p_1 + 2p_3 \quad \text{entonces}$$

(a) Demuestre que β es una base de $\mathbb{V}$

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que β es una base de $\mathbb{V}$

Etapa 2. Gestión de la información

(i) Como $\alpha = \{p_1, p_2, p_3\}$ una base de $\mathbb{V}$ entonces $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = 3$. Por tanto, para que β sea base de $\mathbb{V}$, basta mostrar que es un conjunto linealmente independiente ó que es un sistema de generadores. Mostremos que β, es un sistema de generadores (Nos servirá para responder la pregunta siguiente !!!)

Debemos entonces resolver para cada $u \in \mathbb{V}$, la ecuación

$$u = c_1q_1 + c_2q_2 + c_3q_3 \qquad (*)$$

(ii) Pero, como α es una base entonces existen escalares a_1, a_2, a_3 tales que

$$u = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 \qquad (**)$$

Pero, por definición de β tenemos que $(*)$ se escribe como:

$$\begin{aligned} u &= c_1(p_1+p_2) + c_2(p_1 - p_2 - 3p_3) + c_3(-p_1 + 2p_3) \\ &= (c_1 + c_2 - c_3)p_1 + (c_1 - c_2)p_2 + (-3c_2 + 2c_3)p_3 \end{aligned}$$

De la unicidad de la representación p(**). sigue que debe verificarse simultáneamente que

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1+c_2-c_3 & = & a_1 \\ c_1-c_2 & = & a_2 \\ -3c_2+2c_3 & = & a_3 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Escalonado la matriz ampliada asociada al sistema obtenemos que

$$\left(\begin{array}{rrrcc} 1 & 1 & -1 & | & a_1 \\ 1 & -1 & 0 & | & a_2 \\ 0 & -3 & 2 & | & a_3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & | & 2a_1-a_2+a_3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2a_1-2a_2+a_3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3a_1-3a_2+2a_3 \end{array}\right)$$

Así que u se escribe como:

$$\begin{aligned} u &= c_1q_1+c_2q_2+c_3q_3 \\ &= (2a_1-a_2+a_3)q_1+(2a_1-2a_2+a_3)q_2+(3a_1-3a_2+2a_3)q_3 \qquad (***) \end{aligned}$$

Por tanto, β genera $\mathbb{V}$ y entonces es una base.

(b) Determine $[I]_\alpha^\beta$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar la matriz cambio de base $[I]_\alpha^\beta$

Etapa 2. Gestión de la información

(i) Por definición tenemos que

$$[I]_\alpha^\beta = ([p_1]_\beta \quad [p_2]_\beta \quad [p_3]_\beta)$$

(ii) De $(***)$ y $(**)$, sigue que

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} 2a_1-a_2+a_3 \\ 2a_1-2a_2+a_3 \\ 3a_1-3a_2+2a_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow u = a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3$$

Luego, tenemos los casos:

$$p_1 = 1\cdot p_1+0\cdot p_2+0\cdot p_3 \Longrightarrow [p_1]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = 0\cdot p_1+1\cdot p_2+0\cdot p_3 \Longrightarrow [p_2]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = 0\cdot p_1+0\cdot p_2+1\cdot p_3 \Longrightarrow [p_3]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Si $q = p_1+p_2+p_3$ entonces determine $[q]_\beta$

Solución

Etapa 1. debemos determinar $[q]_\beta$

Etapa 2. Gestión de la información

(i) Como $q = p_1 + p_2 + p_3$ entonces $[q]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) Conforme a la filosofía de la matriz cambio de base tenemos que

$$\begin{aligned}
[q]_\beta &= [I]_\alpha^\beta [q]_\alpha \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$