

Álgebra¹ - Solución Pep 4
 Profesor Ricardo Santander Baeza
 5 de Enero del 2009

(1) Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a_0 - a_1 + a_2 = 0\}$ entonces

(a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$

Solución

$$\begin{aligned} p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge a_0 + a_2 = a_1 \\ &\iff p(x) = a_0 + (a_0 + a_2)x + a_2x^2 \wedge [a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R}] \\ &\iff p(x) = a_0 + a_0x + a_2x + a_2x^2 \wedge [a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R}] \\ &\iff p(x) = a_0(1+x) + a_2(x+x^2) \wedge [a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R}] \\ &\iff p(x) \in \langle \{(1+x), (x+x^2)\} \rangle \end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{W} = \langle \{(1+x), (x+x^2)\} \rangle \leq \mathbb{R}_2[x]$

(b) Si definimos para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2) \quad (1)$$

entonces determine \mathbb{W}^\perp respecto del producto definido en (1)

Solución

$$\begin{aligned} r(x) \in \mathbb{W}^\perp &\iff r(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge \langle r(x), p(x) \rangle = 0 \quad (\forall p(x); p(x) \in \mathbb{W}) \\ &\iff r(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge \langle r_0 + r_1x + r_2x^2, 1+x \rangle = 0 \wedge \langle r_0 + r_1x + r_2x^2, x+x^2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned} \langle r_0 + r_1x + r_2x^2, 1+x \rangle = 0 &\iff r_0 \cdot 1 + (r_0 + r_1 + r_2) \cdot 2 + (r_0 + 2r_1 + 4r_2) \cdot 3 = 0 \iff 3r_0 + 4r_1 + 7r_2 = 0 \\ \langle r_0 + r_1x + r_2x^2, x+x^2 \rangle = 0 &\iff r_0 \cdot 0 + (r_0 + r_1 + r_2) \cdot 2 + (r_0 + 2r_1 + 4r_2) \cdot 6 = 0 \iff 4r_0 + 7r_1 + 13r_2 = 0 \end{aligned}$$

¹Cada problema vale 1.5 puntos
 Tiempo 120'

Así que,

$$\begin{aligned}
 r(x) \in \mathbb{W}^\perp &\iff r(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge \begin{array}{l} 3r_0 + 4r_1 + 7r_2 = 0 \\ 4r_0 + 7r_1 + 13r_2 = 0 \end{array} \\
 &\iff r(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge \begin{array}{l} 12r_0 + 16r_1 + 28r_2 = 0 \\ 12r_0 + 21r_1 + 39r_2 = 0 \end{array} \\
 &\iff r(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge 5r_1 + 11r_2 = 0 \\
 &\iff r(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge r_1 = -\frac{11}{5}r_2 \wedge r_0 = -\frac{7}{4}r_1 - \frac{13}{4}r_2 = \frac{3}{5}r_2 \\
 &\iff r(x) = \frac{3}{5}r_2 - \frac{11}{5}r_2x + r_2x^2 \wedge r_2 \in \mathbb{R} \\
 &\iff r(x) = r_2 \left(\frac{3}{5} - \frac{11}{5}x + x^2 \right) \wedge r_2 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{W}^\perp = \left\langle \frac{3}{5} - \frac{11}{5}x + x^2 \right\rangle$

Podemos comprobar directamente que

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{3}{5} - \frac{11}{5}x + x^2, 1 + x \right\rangle &= \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5} - \frac{11}{5} + 1 \right) 2 + \left(\frac{3}{5} - \frac{22}{5} + 4 \right) 3 = 0 \\
 \left\langle \frac{3}{5} - \frac{11}{5}x + x^2, x + x^2 \right\rangle &= \frac{3}{5} \cdot 0 + \left(\frac{3}{5} - \frac{11}{5} + 1 \right) 2 + \left(\frac{3}{5} - \frac{22}{5} + 4 \right) 6 = 0
 \end{aligned}$$

(2) Sea \mathbb{V} es un \mathbb{R} espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = 4$, y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de \mathbb{V} .

(a) Demuestre que $\beta = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ tal que $w_i = \sum_{j=1}^i (-1)^j v_j$, para $i = 1, 2, 3, 4$ es un conjunto linealmente independiente en \mathbb{V} .

Solución

En primer lugar, tenemos que por definición.

$$\begin{aligned}
 w_1 &= -v_1 \\
 w_2 &= -v_1 + v_2 \\
 w_3 &= -v_1 + v_2 - v_3 \\
 w_4 &= -v_1 + v_2 - v_3 + v_4
 \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora, para continuar para demostrar la independencia lineal de β procedemos conforme a la definición, y a lo obtenido en (2)

$$\begin{aligned}
 a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + a_4w_4 = 0_{\mathbb{V}} &\implies a_1(-v_1) + a_2(-v_1 + v_2) + a_3(-v_1 + v_2 - v_3) + a_4(-v_1 + v_2 - v_3 + v_4) = 0_{\mathbb{V}} \\
 &\implies (-a_1 - a_2 - a_3 - a_4)v_1 + (a_2 + a_3 + a_4)v_2 + (-a_3 - a_4)v_3 + a_4v_4 = 0_{\mathbb{V}} \\
 &\implies \begin{array}{l} -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ -a_3 - a_4 = 0 \\ a_4 = 0 \end{array} \implies a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0
 \end{aligned}$$

Así que β es linealmente independiente

(b) Determine $[w_1 + w_2 + w_3 + w_4]_{\alpha}$

Solución

Conforme a (2) tenemos que

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= (-v_1) + (-v_1 + v_2) + (-v_1 + v_2 - v_3) + (-v_1 + v_2 - v_3 + v_4) \\ &= -4v_1 + 3v_2 - 2v_3 + v_4 \end{aligned}$$

Luego,

$$[w_1 + w_2 + w_3 + w_4]_\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) Si $\mathbb{W} = \langle \{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\} \rangle \leq \mathbb{R}^4$ entonces usando el producto interno usual de \mathbb{R}^4 .

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$

Solución

Observamos que $\langle (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle = 2$ y que $\alpha = \{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\}$ es linealmente independiente, por tanto debemos ortogonalizar usando Gram - Schmidt, e.e.

$$\begin{aligned} v'_1 &= (1, 1, 1, 0) \\ v'_2 &= (0, 1, 1, 1) - \frac{\langle (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle}{\langle (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0) \rangle} (1, 1, 1, 0) \\ &= (0, 1, 1, 1) - \frac{2}{3} (1, 1, 1, 0) \\ &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\alpha' = \left\{ (1, 1, 1, 0), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) \right\}$$

Es una base ortogonal y entonces

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{W}}(x, y, z, t) &= \frac{\langle (x, y, z, t), (1, 1, 1, 0) \rangle}{\langle (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0) \rangle} (1, 1, 1, 0) + \frac{\langle (x, y, z, t), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) \rangle}{\langle \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) \rangle} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) \\ &= \frac{x + y + z}{3} (1, 1, 1, 0) + \frac{-2x + y + z + 3t}{5} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) \\ &= \left(\frac{3x + y + z - 2t}{5}, \frac{x + 2y + 2z + t}{5}, \frac{x + 2y + 2z + t}{5}, \frac{-2x + y + z + 3t}{5} \right) \end{aligned}$$

(b) Calcule $d((-2, 1, 1, 3), W)$

Solución

Alternativa 1. Como $(-2, 1, 1, 3) = -2(1, 1, 1, 0) + 3(0, 1, 1, 1) \in \mathbb{W}$ entonces $d((-2, 1, 1, 3), W) = 0$.

Alternativa 2. Hacemos el cálculo usando la definición

$$d((-2, 1, 1, 3), W) = \|(-2, 1, 1, 3) - P_W(-2, 1, 1, 3)\| = \|(-2, 1, 1, 3) - (-2, 1, 1, 3)\| = 0$$

(4) Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mapsto \mathbb{R}^4$ tal que $T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x - y, \lambda x + y, x + \lambda y + z, x + y + z + t)$

(a) Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2), \mathbb{R}^4)$ ($\forall \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$)

Solución

Etapa 1. Si $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix}$ entonces debemos demostrar que $T(A + B) = T(A) + T(B)$.

$$\begin{aligned} T(A + B) &= T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & t_1 + t_2 \end{pmatrix} \\ &= ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) + \lambda(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), \\ &\quad x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 + t_1 + t_2) \\ &= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, \lambda x_1 + \lambda x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 + \lambda y_1 + \lambda y_2) + z_1 + z_2, \\ &\quad x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 + t_1 + t_2) \\ &= (x_1 - y_1, \lambda x_1 + y_1, x_1 + \lambda y_1 + z_1, x_1 + y_1 + z_1 + t_1) + \\ &\quad (x_2 - y_2, \lambda x_2 + y_2, x_2 + \lambda y_2 + z_2, x_2 + y_2 + z_2 + t_2) \\ &= T \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix} \\ &= T(A) + T(B) \end{aligned}$$

Etapa 2. Si $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces debemos demostrar que $T(rA) = rT(A)$.

$$\begin{aligned} T(rA) &= T \left(r \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right) \\ &= T \left(\begin{pmatrix} rx & ry \\ rz & rt \end{pmatrix} \right) \\ &= (rx - ry, \lambda rx + ry, rx + \lambda ry + rz, rx + ry + rz + rt) \\ &= (r(x - y), r(\lambda x + y), r(x + \lambda y + z), r(x + y + z + t)) \\ &= r(x - y, \lambda x + y, x + \lambda y + z, x + y + z + t) \\ &= rT \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ &= rT(A) \end{aligned}$$

Luego, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2), \mathbb{R}^4)$ ($\forall \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$)

(b) Determine el conjunto $\mathbb{B} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ es un isomorfismo}\}$

Solución

En primer lugar, $\lambda \in \mathbb{B} \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge T$ es un isomorfismo (*)

En segundo lugar, observamos que como T es lineal y que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) = 4$ entonces conforme al teorema de la dimensión, para que T sea un isomorfismo es suficiente verificar que T es inyectiva o bien sobreyectiva.

En este caso, estudiaremos las condiciones para la inyectividad de T , es decir:

$$\lambda \in \mathbb{B} \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge T \text{ es inyectiva} \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \ker(T) = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A \in \ker(T) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge T(A) = 0_{\mathbb{R}} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0) \\ &\iff A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (x - y, \lambda x + y, x + \lambda y + z, x + y + z + t) = (0, 0, 0, 0) \\ &\iff A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ \lambda x + y = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{array} \right\} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \left. \begin{array}{l} x = y \\ x(\lambda + 1) = 0 \\ x(1 + \lambda) + z = 0 \\ x + x + z + t = 0 \end{array} \right\} \quad (**) \end{aligned}$$

Ojo en (**) para que $x = 0$ es necesario y suficiente que $\lambda + 1 \neq 0$, es decir $\lambda \neq -1$. Por tanto T será inyectiva y por ende un isomorfismo si $\lambda \neq -1$, luego,

$$\mathbb{B} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$