Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 4
Profesor Ricardo Santander Baeza
14 de Diciembre del 2009

(1) Si consideramos el subespacio $\mathbb{W} = \{(x,y,t,z) \in \mathbb{R}^4 \mid 9z - 3x - 3y = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$ determine:

(a) $P_{\mathbb{W}}$, la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{W}$

Solución

En primer lugar, determinamos una base de W.

$$\begin{aligned} u \in W &\iff u = (x,y,t,z) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge\ 9z - 3x - 3y = 0 \\ &\iff u = (x,y,t,z) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge\ x + y - 3z = 0 \\ &\iff u = (x,y,t,z) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge\ y = 3z - x \\ &\iff u = (x, 3z - x, t, z) \\ &\iff u = x(1,-1,0,0) + z(0,3,0,1) + t(0,0,1,0) \end{aligned}$$

Luego, $W = \langle \{(1,-1,0,0), (0,3,0,1), (0,0,1,0)\} \rangle$. Así que $\dim_{\mathbb{R}}(W) \leq 3$, por tanto debemos verificar que $\alpha = \{(1,-1,0,0), (0,3,0,1), (0,0,1,0)\}$ es una base de W, y para ello sólo falta ver que es linealmente independiente. Es decir, debemos mostrar que

$a_1(1,-1,0,0) + a_2(0,3,0,1) + a_3(0,0,1,0) = (0,0,0,0) \Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$ entonces

$$\begin{aligned} a_1(1,-1,0,0) + a_2(0,3,0,1) + a_3(0,0,1,0) = (0,0,0,0) &\Longrightarrow (a_1, 3a_2 - a_1, a_3, a_2) = (0,0,0,0) \\ &\Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto α es una base de W.

A seguir verificamos si α es un base ortogonal, respecto del producto interno usual.

$$\begin{aligned} \langle (1,-1,0,0), (0,0,1,0) \rangle &= 0 \\ \langle (1,-1,0,0), (0,3,0,1) \rangle &= -3 \\ \langle (0,3,0,1), (0,0,1,0) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Luego, α no es una base ortogonal, así que la ortogonalizamos vía G-S.

$$\begin{aligned} v_1' &= (1,-1,0,0) \\ v_2' &= (0,0,1,0) \\ v_3' &= (0,3,0,1) - \frac{\langle (0,3,0,1), (0,0,1,0) \rangle}{\langle (0,0,1,0), (0,0,1,0) \rangle}(0,0,1,0) - \frac{\langle (0,3,0,1), (1,-1,0,0) \rangle}{\langle (1,-1,0,0), (1,-1,0,0) \rangle}(1,-1,0,0) \\ &= (0,3,0,1) + \frac{3}{2}(1,-1,0,0) \\ &= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 1 \right) \end{aligned}$$

Luego formamos la base ortogonal $\alpha' = \{(1,-1,0,0), (0,0,1,0), (3,3,0,2)\}$.

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

Finalmente procedemos a calcular la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre W. Es decir $P_{\mathbb{W}} : \mathbb{R}^4 \longmapsto W$ tal que $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto P_W(a,b,c,d) \in W$

$$
\begin{aligned}
P_w(a,b,c,d) &= \frac{\langle (a,b,c,d),(1,-1,0,0)\rangle}{\langle (1,-1,0,0),(1,-1,0,0)\rangle}(1,-1,0,0) + \frac{\langle (a,b,c,d),(0,0,1,0)\rangle}{\langle (0,0,1,0),(0,0,1,0)\rangle}(0,0,1,0) + \\
& \frac{\langle (a,b,c,d),(3,3,0,2)\rangle}{\langle (3,3,0,2),(3,3,0,2)\rangle}(3,3,0,2) \\
&= \left(\frac{a-b}{2}\right)(1,-1,0,0) + c(0,0,1,0) + \left(\frac{3a+3b+2d}{22}\right)(3,3,0,2) \\
&= \left(\frac{a-b}{2} + \frac{9a+9b+6d}{22}, \frac{b-a}{2} + \frac{9a+9b+6d}{22}, c, \frac{3a+3b+2d}{11}\right) \\
&= \left(\frac{11a-11b+9a+9b+6d}{22}, \frac{11b-11a+9a+9b+6d}{22}, c, \frac{3a+3b+2d}{11}\right) \\
&= \left(\frac{20a-2b+6d}{22}, \frac{20b-2a+6d}{22}, c, \frac{3a+3b+2d}{11}\right) \\
&= \left(\frac{10a-b+3d}{11}, \frac{10b-a+3d}{11}, c, \frac{3a+3b+2d}{11}\right)
\end{aligned}
$$

Para nuestra tranquilidad, podemos comprobar la validez de nuestro trabajo, usando las propiedades conocidas.

$$
P_w(1,-1,0,0) = \left(\frac{10+1}{11}, \frac{-10-1}{11}, 0, \frac{3-3}{11}\right) = (1,-1,0,0)\, ok
$$

(b) $d((x,y,z,t),\mathbb{W})$, la distancia de un vector de $\mathbb{R}^4$ al subespacio $\mathbb{W}$

Solución

Sabemos que $d((x,y,z,t),W) = \|(x,y,z,t) - P_w(x,y,z,t)\|$. Así que en consecuencia hacemos los cálculos

$$
\begin{aligned}
\|(x,y,z,t) - P_w(x,y,z,t)\| &= \left\|(x,y,z,t) - \left(\frac{10x-y+3t}{11}, \frac{10y-x+3t}{11}, z, \frac{3x+3y+2t}{11}\right)\right\| \\
&= \left\|\left(\frac{11x-10x+y-3t}{11}, \frac{11y-10y+x-3t}{11}, 0, \frac{11t-3x-3y-2t}{11}\right)\right\| \\
&= \left\|\frac{x+y-3t}{11}, \frac{y+x-3t}{11}, 0, \frac{9t-3x-3y}{11}\right\| \\
&= \left\|\frac{x+y-3t}{11}, \frac{y+x-3t}{11}, 0, \frac{-3(x+y-3t)}{11}\right\|
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
d((x,y,z,t),W) &= \sqrt{\left(\left[\frac{x+y-3t}{11}\right]^2 + \left[\frac{y+x-3t}{11}\right]^2 + \left[\frac{-3(x+y-3t)}{11}\right]^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(\left[\frac{x+y-3t}{11}\right]^2 + \left[\frac{y+x-3t}{11}\right]^2 + 9\left[\frac{(x+y-3t)}{11}\right]^2\right)} \\
&= \sqrt{11\left[\frac{x+y-3t}{11}\right]^2}
\end{aligned}
$$

Podemos como antes, en base a nuestras propiedades, comprobar nuestro resultado:

$$
d((1,-1,0,0),W) = \sqrt{11\left[\frac{1-1-0}{11}\right]^2} = 0 \qquad (ok)
$$

(c) $\mathbb{W}^{\perp}$, el complemento ortogonal de $\mathbb{W}$

Solución

Sabemos que en concordancia con nuestros resultados que para determinar $W^{\perp}$ basta anular a los elementos de una base de W. Así que procedemos en conformidad.

$$\begin{aligned}
u \in W^{\perp} &\iff u \in \mathbb{R}^4 \wedge \langle u, (1,-1,0,0)\rangle = 0 \wedge \langle u, (0,0,1,0)\rangle = 0 \wedge \langle u, (3,3,0,2)\rangle = 0 \\
&\iff u = (x,y,z,t) \wedge \langle (x,y,z,t), (1,-1,0,0)\rangle = 0 \wedge \langle (x,y,z,t), (0,0,1,0)\rangle = 0 \wedge \langle (x,y,z,t), (3,3,0,2)\rangle = 0 \\
&\iff u = (x,y,z,t) \wedge x - y = 0 \wedge z = 0 \wedge 3x + 3y + 2t = 0 \\
&\iff u = (x,y,z,t) \wedge x = y \wedge z = 0 \wedge t = -3x \\
&\iff u = (x,x,0,-3x) \\
&\iff u = x(1,1,0,-3)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$W^{\perp} = \langle (1,1,0,-3)\rangle$$

Y verificamos directamente que $\beta = \{(1,-1,0,0), (0,0,1,0), (3,3,0,2), (1,1,0,-3)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$

(2) Si $T : \mathbb{R}_2[x]) \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_0+a_1-a_2, a_0-a_1, a_1-a_2)$ entonces demuestre que T es un isomorfismo

Solución

(a) Por demostrar que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$

En primer lugar, si $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces mostramos que $T(p(x) + q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$

$$\left.\begin{array}{lcl} p(x) \in \mathbb{R}_2[x] & \Leftrightarrow & p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ q(x) \in \mathbb{R}_2[x] & \Leftrightarrow & q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

Así que

$$\begin{aligned}
T(p(x) + q(x)) &= T((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\
&= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2), (a_0 + b_0) - (a_1 + b_1), (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)) \\
&= (a_0 + b_0 + a_1 + b_1 - a_2 - b_2, a_0 + b_0 - a_1 - b_1, a_1 + b_1 - a_2 - b_2) \\
&= (a_0 + a_1 - a_2, a_0 - a_1, a_1 - a_2) + (b_0 + b_1 - b_2, b_0 - b_1, b_1 - b_2) \\
&= T(a_0 + a_1x + a_2x^2) + T(b_0 + b_1x + b_2x^2) \\
&= T(p(x)) + T(q(x))
\end{aligned}$$

En segundo lugar, si $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces mostramos que $T(\lambda p(x)) = \lambda T(p(x))$.
En efecto

$$\begin{aligned}
T(\lambda p(x)) &= T(\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2) \\
&= T((\lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2) \\
&= (\lambda a_0 + \lambda a_1 - \lambda a_2, \lambda a_0 - \lambda a_1, \lambda a_1 - \lambda a_2) \\
&= (\lambda(a_0 + a_1 - a_2), \lambda(a_0 - a_1), \lambda(a_1 - a_2)) \\
&= \lambda(a_0 + a_1 - a_2, a_0 - a_1, a_1 - a_2) \\
&= \lambda T(a_0 + a_1x + a_2x^2) \\
&= \lambda T(p(x))
\end{aligned}$$

Luego, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$

(b) Ahora, sabemos que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ será un isomorfismo si es una función inyectiva y sobreyectiva, pero como la dimensión de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$ es 3 entonces como consecuencia del teorema de la dimensión tenemos que T ser inyectiva es equivalente a T ser sobreyectiva.!!!

Además como $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ entonces ser inyectiva es equivalente a que su núcleo (ker), sea el subespacio nulo, e.e. $\ker(T) = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$.!!!
Entonces estudiemos $\ker(T)$.

$$
\begin{aligned}
p(x) \in \ker(T) &\iff p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(p(x)) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (0,0,0) \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (a_0 + a_1 - a_2, a_0 - a_1, a_1 - a_2) = (0,0,0) \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge \left.\begin{array}{lcl} a_0 + a_1 - a_2 & = & 0 \\ a_0 - a_1 & = & 0 \\ a_1 - a_2 & = & 0 \end{array}\right| \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge a_0 = a_1 = a_2 \;\wedge\; a_0 + a_0 - a_0 = 0 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge a_0 = a_1 = a_2 = 0 \\
&\iff p(x) = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff p(x) \in \{0 + 0x + 0x^2\}
\end{aligned}
$$

Luego, $\ker(T) = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$ y T es inyectiva y por tanto sobreyectiva y es un isomorfismo.

Tenemos una demostración alternativa, que es la siguiente:

Como $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ entonces es posible representar T en forma matricial, como sigue.

$$
[T]_{pol(2)}^{c(3)} \quad = \quad \big([T(1)]_{c(3)} \quad [T(x)]_{c(3)} \quad [T(x^2)]_{c(3)}\big) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \tag{1}
$$

En general tenemos por definición de T que

$$
\begin{aligned}
T(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2) &= (a_0 + a_1 - a_2, a_0 - a_1, a_1 - a_2) \\
&= (a_0 + a_1 - a_2)(1,0,0) + (a_0 - a_1)(0,1,0) + (a_1 - a_2)(0,0,1)
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
[T(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2)]_{pol(2)} \quad = \quad \begin{pmatrix} (a_0 + a_1 - a_2) \\ (a_0 - a_1) \\ (a_1 - a_2) \end{pmatrix} \tag{2}
$$

Así que, aplicando (2) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
[T(1)]_{pol(2)} &= [T(1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2)]_{pol(2)} = \begin{pmatrix} (1 + 0 - 0) \\ (1 - 0) \\ (0 - 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
[T(x)]_{pol(2)} &= [T(0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2)]_{pol(2)} = \begin{pmatrix} (0 + 1 - 0) \\ (0 - 1) \\ (1 - 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\left[T(x^2)\right]_{pol(2)} &= [T(0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2)]_{pol(2)} = \begin{pmatrix} (0 + 0 - 1) \\ (0 - 0) \\ (0 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Aplicando (3) en (1) obtenemos que

$$
[T]_{pol(2)}^{c(3)} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}
$$

Finalmente, usando esta técnica T será un isomorfismo si y sólo si $\det([T]_{pol(2)}^{c(3)}) \neq 0$. Así que calculamos el determinante a (4).

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Así que T es un isomorfismo

(3) Sea $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$. Determine, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ tal que

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución

(a) Debemos determinar $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ tal que $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, en particular debemos determinar $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$.

(b) Ahora, gestionamos la información:

(i) Sabemos que $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(ii) Pero, por definición $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \left(\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} \right) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$

(iii) Así que, juntando la información de los ítemes anteriores obtenemos que

$$\left(\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

De donde sigue que

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \iff T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(iv) Además como α es base entonces tiene solución única la ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e.e. tiene solución única el sistema

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1+a_2+a_3 & = & x \\ a_2+a_3 & = & y \\ a_3 & = & z \end{array}\right| \Longrightarrow a_3 = z \ \wedge \ a_2 = y - z \ \wedge \ a_1 = x - y$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & (x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & (x-y)T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-z)T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zT\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & (x-y)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-z)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4y-4z \\ 6y-x-5z \\ 2y-4z \end{pmatrix} \end{array}$$

Podemos finalmente verificar que:

$$\begin{array}{rcl} T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4\cdot 0 - 4\cdot 0 \\ 6\cdot 0 - 1 - 5\cdot 0 \\ 2\cdot 0 - 4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4\cdot 1 - 4\cdot 0 \\ 6\cdot 1 - 1 - 5\cdot 0 \\ 2\cdot 1 - 4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4\cdot 1 - 4\cdot 1 \\ 6\cdot 1 - 1 - 5\cdot 1 \\ 2\cdot 1 - 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(4) Determine (si es posible) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

(a) $(\mathbb{R}_2[x])_0 = \langle\{1-x\}\rangle$

(b) $(\mathbb{R}_2[x])_1 = \left\langle\left\{1+x, x^2, 1+x+x^2\right\}\right\rangle$

Solución

(a) Debemos determinar, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$, sujeta a las condiciones de encima. e.e debemos determinar $T(p(x))$ para $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$

(b) Gestionando la información tenemos que

(i) Por definición

$$1-x \in (\mathbb{R}_2[x])_0 \Longleftrightarrow (1-x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(1-x) = 0(1-x) = 0 + 0x + 0x^2$$

(ii) Como $1+x+x^2 = 1\cdot(1+x)+x^2$ entonces $\{1+x, x^2, 1+x+x^2\}$ es un conjunto linealmente dependiente y por tanto tenemos por ejemplo que:

$$(\mathbb{R}_2[x])_1 = \left\langle\left\{1+x, x^2\right\}\right\rangle$$

Además

$$\begin{array}{rcl} 1+x \in (\mathbb{R}_2[x])_1 & \Longleftrightarrow & (1+x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(1+x) = 1 \cdot (1-x) = 1+x \\ x^2 \in (\mathbb{R}_2[x])_1 & \Longleftrightarrow & x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(x^2) = 1 \cdot x^2 = x^2 \end{array}$$

(iii) Si $\alpha = \{1-x, 1+x, x^2\}$ genera $\mathbb{R}_2[x]$ entonces es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ ya que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3$
Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ entonces

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = c_1(1-x) + c_2(1+x) + c_3x^2 = (c_1+c_2) + (c_2-c_1)x + c_3x^2$$

Luego,

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & a_0 \\ -c_1 + c_2 & = & a_1 \\ c_3 & = & a_2 \end{array}\right| \Longrightarrow c_3 = a_2 \ \wedge \ c_2 = \frac{a_0+a_1}{2} \ \wedge \ c_1 = \frac{a_0-a_1}{2}$$

Por tanto

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = \frac{a_0-a_1}{2}(1-x) + \frac{a_0+a_1}{2}(1+x) + a_2x^2 \tag{5}$$

Finalmente, construimos T usando (5)

$$\begin{array}{rcl} T(a_0 + a_1x + a_2x^2) & = & \frac{a_0-a_1}{2}T(1-x) + \frac{a_0+a_1}{2}T(1+x) + a_2Tx^2 \\ & = & \frac{a_0+a_1}{2}(1+x) + a_2x^2 \\ & = & \left(\frac{a_0+a_1}{2}\right) + \left(\frac{a_0+a_1}{2}\right) x + a_2x^2 \end{array}$$

Si comprobamos tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} T(1-x) & = & \left(\frac{1-1}{2}\right) + \left(\frac{1-1}{2}\right) x + 0\, x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ T(1+x) & = & \left(\frac{1+1}{2}\right) + \left(\frac{1+1}{2}\right) x + 0\, x^2 = 1 + x \\ T(x^2) & = & \left(\frac{0+0}{2}\right) + \left(\frac{0+0}{2}\right) x + 1\, x^2 = x^2 \end{array}$$